LI ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

КИРОВСКАЯ ОБЛАСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ, МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Киров
2024

Оргкомитету и жюри муниципального этапа математической олимпиады школьников

Уважаемые коллеги!

В начале олимпиады напомните участникам, что нужно не только приводить ответы, но и *обосновывать* их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ — лишь его результат).

Продолжительность олимпиады *составляет* **для 5-6 кл. — 2,5 часа, для 7 кл. — 3 часа, для 8 кл. — 3,5 часа, для 9-11 кл. — 4 часа,** *не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.*

После олимпиады (лучше всего — *в тот же день*) просим провести *разбор задач для ее участников.*

Отзывы об этой брошюре и олимпиадных заданиях направляйте по адресу: *610005, г. Киров, 5, а/я 1026, ЦДООШ.*

Автор благодарен А.В. Черанёвой, О.В. Старостиной, И.А. Семёновой, Е.М. Ковязиной, О.В. Рубановой за полезные обсуждения и критику.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. *Решение каждой задачи, независимо от её трудности, оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7, дробные оценки не допускаются.*

2. При оценке рассуждений в олимпиадных работах, как правило, сначала дается ответ на принципиальный вопрос: являются они решением задачи (хотя, может быть, и с различными недостатками) или не являются (хотя, может быть, и содержат существенное продвижение в направлении решения). В первом случае оценка должна быть *не ниже 4*, во втором – *не выше 3*.

3. По проверке и оценке решений большинства задач мы даём *конкретные указания*. Они помещаются после наших решений и отмечены значком •. В случаях, не предусмотренных конкретными указаниями, оценка определяется по следующим общим правилам:

Оценка	*За что ставится*
7	Верное решение
6	Верное решение с небольшими недочетами
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты
4	Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно
3	Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении
1-2	Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Решение, выполненное более чем наполовину, считается *существенно неполным*, если:

- ✓ содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- ✓ при верной общей схеме рассуждений явно или скрыто опирается на важные недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- ✓ состоит в разборе нескольких возможных случаев, и хотя бы один *существенный* случай упущен или разобран неверно;
- ✓ состоит из двух частей (например, доказательства необходимости и достаточности либо доказательства оценки и построения примера), из которых верно выполнена только одна, причём более сложная.

При расхождении между общими и конкретными указаниями применяются конкретные.

4. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота и обоснованность*. Нельзя снижать оценку за «нерациональность» решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено конкретными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.***

5. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего — логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *не вычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочетам.

6. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике. Умение хорошо *догадываться* на олимпиаде должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение.

7. Ответ, найденный логическим путем, как правило, оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

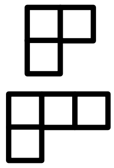
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 5 КЛАССА

Задача 1. *Найдите два идущих подряд числа, суммы цифр которых отличаются на 17.*

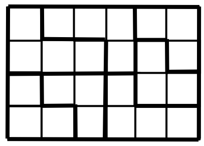
Решение. Например, 99 и 100.

• За любой верный пример — *7 баллов*.

♦ Годятся любые два числа, где от меньшего к большему происходит переход через сотню, но не через тысячу.



Задача 2. *Как разрезать клетчатый прямоугольник размером 4×6 клеток на четыре «уголка» из трех клеток и три «уголка» из четырех клеток? «Уголки» изображены на рисунках справа, их можно поворачивать и переворачивать.*



Решение. Например, как на рисунке справа.

• За любой верный пример — *7 баллов*.

Задача 3. *Сестра Рустама на 4 года младше него. Через 28 лет ей будет в три раза больше лет, чем Рустаму сейчас. Сколько лет Рустаму? Объясните, как был найден ответ.*

Ответ. 12 лет. ***Решение.*** Если сестре станет в три раза больше лет, чем Рустаму сейчас, через 28 лет, то Рустаму станет втрое больше лет, чем сейчас, через 28–4 = 24 года. Эти 24 года равны удвоенному возрасту Рустама сейчас, то есть ему 24 : 2 = 12 лет.

• Верный ответ без объяснения — *2 балла*. Из приведенного объяснения не следует, что других ответов нет (например, если ответ был найден подбором, но не полным перебором возможностей) — *не выше 4 баллов*.

Задача 4. *Каждый из пяти мальчиков — либо лжец, который всегда лжет, либо честный человек, который всегда говорит правду. Между ними произошел такой разговор. Антон — Боре: «Ты лжец!» Боря — Антону: «Это ты лжец!» Вася — Гене: «Ты всегда лжешь!» Гена — Васе: «Сам такой!» Дима, обращаясь к остальным: «Среди нас пятерых — трое честных.» Сколько честных среди этих пятерых может быть на самом деле? Найдите все возможные варианты, ответ объясните.*

Ответ. Двое или трое. ***Решение.*** Антон и Боря называют друг друга лжецами, если оба они лжецы, то оба говорят правду, а если оба честные — то оба лгут. Если же один из них честный, а другой лжец, то все сходится: честный говорит правду, а лжец — неправду. По той же причине в паре из Васи и Гены один честный, а другой — лжец. Дима же может быть лжецом — и тогда он лжёт, так как честных в этом случае двое, или честным — и тогда он говорит правду, потому что честных в этом случае трое.

• Только один из двух ответов, объяснения нет — *1 балл*. Оба ответа без объяснения — *2 балла*. Оба ответа с проверкой, если из объяснений не следует, что других ответов нет — *3 балла*.

Задача 5. *Вася расставил в клетках таблицы размером 11×11 крестики и нолики (в каждой клетке — один знак). Оказалось, что в таблице есть 10 столбцов, в каждом из которых крестиков больше, чем ноликов. Могло ли оказаться, что в этой* *таблице есть 10 строк, в каждой из которых ноликов больше, чем крестиков? Если могло — приведите пример, если не могло — объясните, почему.*

Ответ. Могло. ***Решение.*** Выделим в таблице квадрат 10×10, находящийся в левом верхнем углу. Разобьем его на четыре квадрата 5×5. Левый верхний и правый нижний из этих квадратов целиком заполним крестиками, а остальные два — ноликами. Затем крайний правый столбец таблицы целиком заполним ноликами, а во всех клетках нижней строки, кроме самой правой, поставим крестики. Теперь в каждом столбце таблицы, кроме самого правого, стоит 6 крестиков и 5 ноликов, а в каждой строке, кроме самой нижней — 6 ноликов и 5 крестиков.

• Только ответ «могло» — *0 баллов*. Есть верный пример или его описание — *7 баллов*. Нет верного примера или его описания — *0 баллов*.

♦ Есть и другие примеры.

♦ Чтобы в столбце крестиков было больше, чем ноликов, в нем должно быть хотя бы 6 крестиков, а всего в таблице, удовлетворяющей условию задачи — хотя бы $6\cdot10$ крестиков. Аналогично, в этой таблице должно быть хотя $6\cdot10$ ноликов. Всего получается $2\cdot6\cdot10 = 120 = 11^2-1$ крестиков и ноликов. Таким образом, почти во всех столбцах искомой таблицы должно быть ровно по 56 крестиков, а почти во всех строках — ровно по 56 ноликов. Поняв это, можно целенаправленно строить пример (а не поняв, построить его нелегко).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 6 КЛАССА

Задача 1. *Найдите трехзначное число, оканчивающееся на 7, у которого двузначное число, получающееся, если стереть последнюю цифру, вдвое больше двузначного числа, получающегося, если стереть первую цифру. Опишите, как Вы получили ответ.*

Ответ. 947. ***Решение.*** Если число оканчивается на 7, то его произведение на 2 оканчивается на 4. На эту цифру должно оканчиваться число, которое получается, если у трехзначного числа стереть последнюю цифру. Значит, вторая цифра трехзначного числа — это 4, и оно оканчивается на 47. Поэтому оно должно начинаться на $47\cdot2 = 94$, откуда и получаем ответ.

• За верный пример — *5 баллов*. *Из оставшихся 2 баллов* оценивается описание нахождения искомого числа, из которого вытекает его единственность.

Задача 2. *У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших сумках?» «В моей сумке 1/2 числа рыб, которые находятся в его сумке, и еще 10», — ответил первый. «А у меня в сумке столько рыб, сколько у него, и еще 20», — ответил другой. Сколько рыб у первого рыбака и сколько у второго? Объясните, как был найден ответ.*

Ответ. У первого 40 рыб, у второго — 60 рыб. ***Решение.*** Пусть в сумке второго $2x$ рыб. Тогда у первого, по его словам, $x+10$ рыб, а у второго, по его словам, $(x+10)+20$ рыб. Значит, $(x+10)+20 = 2x$, откуда $x = 30$. Значит, у первого $30+10 = 40$ рыб, а у второго — $2\cdot30 = 60$ рыб.

• Верный ответ без всякого объяснения — *0 баллов*. Верный ответ с проверкой, если из решения не вытекает, что других ответов нет — *3 балла*. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — *не выше 4 баллов*.

Задача 3. *Каждый из пяти мальчиков — либо лжец, который всегда лжет, либо честный человек, который всегда говорит правду. Между ними произошел такой разговор. Антон — Боре: «Ты лжец!» Боря — Антону: «Это ты лжец!» Вася — Гене: «Ты всегда лжешь!» Гена — Васе: «Сам такой!» Дима, обращаясь к остальным: «Среди нас пятерых — трое честных.» Сколько честных среди этих пятерых может быть на самом деле? Найдите все возможные варианты, ответ объясните.*

Решение. См. решение задачи 4 для 5 класса.

• Только один из двух ответов, объяснения нет — *1 балл*. Оба ответа без объяснения — *2 балла*. Оба ответа с проверкой, если из объяснений не следует, что других ответов нет — *3 балла*.

Задача 4. *Вася расставил в клетках таблицы размером 11×11 крестики и нолики (в каждой клетке — один знак). Оказалось, что в таблице есть 10 столбцов, в каждом из которых крестиков больше, чем ноликов. Могло ли оказаться, что в этой таблице есть 10 строк, в каждой из которых ноликов больше, чем крестиков? Если могло — приведите пример, если не могло — объясните, почему.*

Ответ. Могло. ***Решение.*** См. решение задачи 5 для 5 класса.

• Только ответ «могло» — *0 баллов*. Есть верный пример или его описание — *7 баллов*. Нет верного примера или его описания — *0 баллов*.

Задача 5. *На столе лежат два куска бумаги: один в форме треугольника, другой — в форме четырехугольника. Играют двое, ходят по очереди. Петя, который делает первый ход, каждым своим ходом выбирает любой из имеющихся на столе кусков и режет его на треугольник и четырехугольник. Его соперник Вася каждым своим ходом выбирает любой из имеющихся на столе кусков и режет его на два треугольника. Полученные куски кладутся на стол. Побеждает тот, после хода которого на столе впервые оказывается 2024 треугольника. Кто победит при правильной игре, и как ему для этого надо играть?*

Ответ. Победит Вася. ***Первое решение.*** Посмотрим, как меняется по ходу игры число треугольников на столе. После хода Пети оно не изменяется, если он разрезал треугольник, и увеличивается на 1, если он разрезал четырехугольник. После хода Васи оно увеличивается на 1, если он разрезал треугольник, и увеличивается на 2, если он разрезал четырехугольник. При этом Вася на каждом ходу может выбрать любую из этих двух возможностей, так как после каждого хода Пети на столе есть и треугольник, и четырехугольник.

Опишем теперь выигрышную стратегию Васи. Если Петя первым ходом разрезал треугольник, Вася тоже режет треугольник, а если Петя разрезал четырехугольник, то и Вася режет четырехугольник. После этой пары ходов на столе в первом случае два треугольника, а во втором — четыре. В дальнейшем Вася режет четырехугольник, если Петя перед этим разрезал треугольник, и треугольник, если Петя перед этим разрезал четырехугольник. Тогда каждый раз после пары очередных ходов Пети и Васи количество треугольников на столе увеличивается на 2, причем перед ходом Васи оно меньше, чем после его хода.

Играя таким образом, Вася последовательно получит все четные количества треугольников от 4 до 2024, а Петя при этом не сможет получить ни одного нового четного числа, и потому проиграет.

Второе решение. Пусть Вася, пока это возможно, делает любые ходы, после которых на столе получается меньше 2023 треугольников. Если такой ход невозможен, то на столе 2022 или 2023 треугольника, и Вася, который каждым ходом может увеличить число треугольников на 1 или 2, побеждает одним ходом. Петя, который может увеличивать число треугольников не больше, чем на 1, при такой игре Васи получить 2024 треугольника не сможет, а так как число треугольников после каждого хода Васи растет, Вася в конце концов победит.

• Только ответ «Вася» — *0 баллов*. Описание верной выигрышной стратегии Васи без обоснования ее правильности — *4 балла*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

Задача 1. *На числовой оси нарисовали отрезок. Найдите координаты его концов, если точки M(3/2) и N(11/4) делят его на три равные части.*

Ответ. 1/4 и 4. ***Решение.*** Пусть точки M и N делят на три равные части отрезок AB, причем точка M лежит между A и N, точка A имеет координату x, а точка B — координату y. Тогда $3/2–x = AM = MN = 11/4–3/2$, откуда $x = 1/4$. Аналогично $y–11/4 = NB = MN = 11/4–3/2$, откуда $y = 4$.

• Ответ без обоснования — *3 балла*. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — *не выше 3 баллов*.

Задача 2. *Из вершины угла AOB провели луч OD, делящий его пополам. Оказалось, что этот луч образует с одной из сторон угла COB, смежного с AOB, угол, на 60° больший, чем COB. Какой могла быть величина угла AOB?*

Ответ. 120° или 160°. ***Решение.*** Пусть $\angle COB = x$. Возможны два случая: $\angle COD = 60°+x$ и $\angle BOD = 60°+x$. В первом случае $\angle DOB = \angle DOC–\angle COB = 60°$, откуда $\angle AOB = 120°$. Во втором случае $180°= 2\angle DOB+\angle COB = 2(60°+x)+x$, откуда $x = 20°$ и $\angle AOB = 160°$.

• *По 2 балла* за каждый из двух ответов и *из 3 баллов* оценивается обоснование того, что других ответов нет. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — *не выше 4 баллов*.

Задача 3. *Вася расставил в клетках таблицы размером 7×7 крестики и нолики (в каждой клетке — один знак). Оказалось, что в таблице есть 6 столбцов, в каждом из которых крестиков больше, чем ноликов. Могло ли оказаться, что в этой таблице есть 6 строк, в каждой из которых ноликов больше, чем крестиков?*

Ответ. Могло. ***Решение.*** Аналогично решению задачи 5 для 5 класса.

• Только ответ «могло» — *0 баллов*. Есть верный пример или его описание — *7 баллов*. Нет верного примера или его описания — *0 баллов*.

Задача 4. *Докажите, что* $\underbrace{22\ldots2}_{1012\text{цифр}} + (\underbrace{33\ldots3}_{1012\text{цифр}})^2 = \underbrace{11\ldots11}_{2024\text{цифры}}$.

Решение. Положим $x = \underbrace{11\ldots11}_{1012\text{цифр}}$. Тогда равенство из условия можно переписать в виде $2x+9x^2 = (10^{1012}+1)x$. Поделив обе части полученного равенства на x, получаем $2+9x = 10^{1012}+1 \Leftrightarrow 9x = 10^{1012}–1 = \underbrace{99\ldots99}_{1012\text{цифр}}$. Последнее равенство очевидно.

Задача 5. *Найдите все целые числа* a*, большие 1 и меньшие 1000, у которых куб суммы цифр равен* a^2.

Ответ. Единственное такое число — 27. ***Решение.*** Разложим квадрат искомого числа a на простые множители: $a^2 = p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n}$. Так как этот квадрат также является кубом суммы цифр числа a, все показатели степеней $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n$ должны делиться на 3. Значит, на 3 должны делиться и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то есть число $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ само должно быть кубом натурального числа. Так как $10^3 = 1000$, достаточно проверить на выполнение условия задачи числа $2^3, \dots, 9^3$. Сделав это, находим, что из них искомым является только число $3^3 = 27$: $27^2 = (2+7)^3 = 729$.

• Только ответ — *1 балл*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. *У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших сумках?» «В моей сумке 1/2 числа рыб, которые находятся в его сумке, и еще 10», — ответил первый. «А у меня в сумке столько рыб, сколько у него, и еще 20», — ответил другой. Сколько рыб у первого рыбака и сколько у второго? Объясните, как был найден ответ.*

Решение. См. решение задачи 2 для 6 класса.

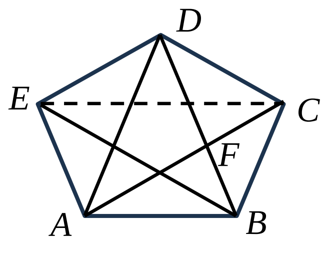
• Верный ответ без всякого объяснения — *0 баллов*. Верный ответ с проверкой, если из решения не вытекает, что других ответов нет — *3 балла*. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — *не выше 4 баллов*.

Задача 2. *Целые числа от 1 до 13 разбили на две группы. В каждой из групп все числа перемножили. Оказалось, что одно из полученных произведений делится на другое. Докажите, что частное от этого деления больше 2024.*

Решение. Пусть произведение A делится на произведение B. Простые числа 7, 11, 13, других кратных которым среди чисел от 1 до 13 нет, должны войти в произведение A. Далее, в произведении всех чисел от 1 до 13 тройка содержится в пятой степени. Поэтому в разложение числа A на простые множители она должна входить по крайней мере в третьей степени, а в разложение числа B — не более, чем во второй. Значит, в разложении на простые множители частного A/B должны содержаться множители 3, 7, 11 и 13, то есть оно не меньше, чем $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003 > 2024$.

Задача 3. *Докажите, что* $\underbrace{22\dots2}_{1012\text{цифр}} + (\underbrace{33\dots3}_{1012\text{цифр}})^2 = \underbrace{11\dots11}_{2024\text{цифры}}$.

Решение. См. решение задачи 4 для 7 класса.



Задача 4. *Четыре диагонали выпуклого пятиугольника равны 1. Докажите, что периметр этого пятиугольника меньше 6.*

Решение. Пусть все диагонали пятиугольника $ABCDE$, кроме, быть может, диагонали EC, равны 1. Обозначим через F точку пересечения диагоналей AC и BD. По неравенству треугольника $AB < AF+FB$ и $CD < CF+FD$, откуда $AB+CD < AF+CF+FB+FD = AC+BD = 2$ (1). Аналогично, рассматривая диагонали AC и BE, получаем, что $AE+BC < 2$ (2). Наконец, из треугольника DBE получаем $ED < BE+BD < 1+1 = 2$ (3). Осталось сложить неравенства (1), (2) и (3).

Задача 5. *При каких целых n, больших 2, можно расставить в клетках таблицы размером n×n крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в* *каждом столбце таблицы, кроме одного, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждой строке таблицы, кроме одной, ноликов было больше, чем крестиков?*

Ответ. При всех нечетных n. ***Решение.*** Расстановка крестиков и ноликов в таблице при нечетном n аналогична описанной в решении задачи 5 для 5 класса. Пусть $n = 2k$ четно. Тогда в каждом из $2k–1$ столбцов таблицы, где крестиков больше, чем ноликов, крестиков должно быть по крайней мере $k+1$. Значит, всего в таблице должно быть по крайней мере $(2k–1)(k+1) = 2k^2+k–1 > 2k^2$ крестиков (так как по условию $n > 2$, то $k > 1$), то есть больше половины общего числа $4k^2$ клеточек таблицы. Но из рассмотрения строк таким же образом получается, что больше половины общего числа клеточек таблицы должно быть заполнено ноликами. Полученное противоречие показывает, что при четном n таблицу нужным образом заполнить нельзя.

• Только ответ — *0 баллов*. Только частные случаи расстановок — *0 баллов*. Только показано, что при всех нечетных n искомые расстановки есть — *3 балла*. Только показано, что при всех четных n искомых расстановок нет — *2 балла*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. *Оля опасается ездить в темноте и потому до захода солнца едет со скоростью 100 км/ч, а после захода солнца — со скоростью 60 км/ч. Она выехала в 17:00, ехала без остановок и за три часа проехала 230 км. Когда зашло солнце?*

Ответ. В 18:15. ***Решение.*** Пусть до захода солнца прошло x часов. Тогда Оля проехала $100x+60(3–x) = 230$ км, откуда $x = 5/4$ часа, то есть 1 час 15 минут. Прибавляя 1 час 15 минут к 17 часам, получаем ответ.

• Только ответ — *0 баллов*. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — *не выше 3 баллов*.

Задача 2. *Каждый из пяти мальчиков — либо лжец, который всегда лжет, либо честный человек, который всегда говорит правду. Между ними произошел такой разговор. Антон — Боре: «Ты лжец!» Боря — Антону: «Это ты лжец!» Вася — Гене: «Ты всегда лжешь!» Гена — Васе: «Сам такой!» Дима, обращаясь к остальным: «Среди нас пятерых — трое честных.» Сколько честных среди этих пятерых может быть на самом деле? Найдите все возможные варианты, ответ объясните.*

Решение. См. решение задачи 4 для 5 класса.

• Только один из двух ответов, объяснения нет — *1 балл*. Оба ответа без объяснения — *2 балла*. Оба ответа с проверкой, если из объяснений не следует, что других ответов нет — *3 балла*.

Задача 3. *Сумма кубов двух не равных 0 чисел равна сумме их четвертых степеней и сумме их пятых степеней. Найдите сумму сотых степеней этих чисел.*

Ответ. 2. ***Решение.*** Обозначим данные числа a и b. $(a^3+b^3)(a^5+b^5) = (a^4+b^4)^2$ по условию. После раскрытия скобок, и приведения подобных членов получаем $a^3b^5+a^5b^3 = 2a^4b^4 \Leftrightarrow a^2 +b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a–b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$. Подставляя $a = b$ в равенство $a^3+b^3 = a^4+b^4$, получаем $2a^3 = 2a^4$, откуда (так как a и b не равны 0) $a = b = 1$ и $a^{100}+b^{100} = 2$.

Задача 4. *В треугольник ABC вписана окружность, а в нее — треугольник DEF со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC. Верно ли, что отноше-*

ние площади треугольника DEF к площади треугольника ABC обязательно больше 1/2024?

Ответ. Неверно. ***Решение.*** Возьмем треугольник ABC с основанием $BC = 20000$ и высотой $AH = 1$. Диаметр вписанного в него круга меньше, чем AH. Значит, его площадь и, тем более, площадь любого вписанного в него треугольника меньше π. Тем самым, отношение площади треугольника DEF к площади треугольника ABC меньше, чем $\pi/10000$, что меньше, чем $1/2024$.

• Только ответ — *0 баллов*.

Задача 5. *Найдите все целые числа a, большие 1, у которых куб суммы цифр равен a^2.*

Ответ. Единственное такое число — 27. ***Решение.*** В решении задачи 5 для 7 класса показано, что все искомые числа являются кубами натуральных чисел, и среди чисел, меньших 1000, единственным искомым является 27. Покажем, что среди чисел, не меньших 1000, искомых чисел нет. Пусть в десятичной записи числа a n знаков, где $n \geq 4$. Тогда $a \geq 10^{n-1}$, а сумма его цифр не превосходит $9n$. Покажем, что при всех $n \geq 4$ выполнено неравенство $(9n)^3 < 10^{2(n-1)}$ (*). При $n = 4$ имеем $36^3 < 100^3 = 10^{2\cdot(4-1)}$. Далее каждый раз с ростом n на единицу число $10^{2(n-1)}$ увеличивается в 100 раз, а число $(9n)^3$ — в $(n+1)^3/n^3 = ((n+1)/n)^3$ раз, что меньше 2^3, так как $(n+1)/n = 1+1/n < 2$. Поэтому правая часть в неравенстве (*) с ростом n растет быстрее левой, и это неравенство сохраняется.

• Только ответ — *1 балл*.

Задача 6. *Есть две кучки по 11 монет в каждой. Известно, что в каждой кучке 10 настоящих монет и одна фальшивая, которая легче настоящей. Все настоящие монеты весят одинаково, обе фальшивые — тоже. Можно ли за **одно** взвешивание на чашечных весах гарантированно найти не менее 8 настоящих монет?*

Ответ. Можно. ***Решение.*** Положим на одну чашу весов 8 монет из кучки А, а на другую — оставшиеся 3 монеты из кучки А и 5 монет из кучки Б. Так как все монеты из кучки А — на весах, там есть хотя бы одна фальшивая монета. Если одна из чашек перевесит, то все монеты на ней — настоящие, и задача решена. Если же весы в равновесии, то там есть фальшивая монета из кучки Б, и мы нашли даже 9 настоящих монет: 3 монеты из кучки А, лежащие на чаше вместе с монетами из кучки Б, и 6 монет из кучки Б, не лежащие на весах.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. *Найдите все трехзначные числа, у которых двузначное число, получающееся, если стереть последнюю цифру, впятеро больше двузначного числа, получающегося, если стереть первую цифру.*

Ответ. Таких чисел нет. ***Решение.*** Число, делящееся на 5, оканчивается на 0 или на 5. На 0 двузначное число, получающееся, если стереть последнюю цифру нашего трехзначного, оканчиваться не может, потому что тогда число, которое получается, если стереть у нашего трехзначного числа первую цифру, не будет двузначным. Если же двузначное число, получающееся после стирания последней цифры нашего трехзначного, оканчивается на 5, то число, которое получается, если стереть у нашего трехзначного числа первую цифру, начинается на 5, и результат его умножения на 5 будет трехзначным.

• Только ответ — *0 баллов*.

Задача 2. *Можно ли все целые числа от 1 до 100 разбить на три группы так, чтобы сумма всех чисел первой группы была вдвое меньше суммы всех чисел второй группы, а сумма всех чисел второй группы была втрое меньше суммы всех чисел третьей группы? (Числа в группе не обязаны идти подряд.)*

Ответ. Нельзя. ***Решение.*** Пусть сумма всех чисел первой группы равна S. Тогда сумма чисел второй группы равна $2S$, третьей — $6S$, а всех чисел — $9S$. С другой стороны, сумма всех чисел от 1 до 100 равна $100\cdot 101/2 = 50\cdot 101$, и на 9 не делится.

• Только ответ — *0 баллов*.

Задача 3. *Углы при вершинах A, B, C, D и E вписанного в окружность пятиугольника ABCDE равны соответственно 95°, 110°, 100°, 120°, 115°. Найдите угол CAD.*

Ответ. 45°. ***Решение.*** Будем обозначать длину меньшей из двух дуг, заданных точками X и Y окружности, через XY. По теореме о вписанном угле

$$AB+BC+CD = 2\angle DEA = 230° \text{ и } AE+ED+CD = 2\angle ABC = 220°.$$

Складывая эти равенства, получаем $(AB+BC+CD+DE+EA)+CD = 360°+CD$, откуда $CD = 90°$ и $\angle CAD = CD/2 = 45°$.

• Только ответ — *0 баллов*.

Задача 4. *Можно ли расставить в клетках таблицы размером 11×11 крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в таблице было 10 столбцов, в каждом из которых крестиков больше, чем ноликов, и 10 строк, в каждой из которых ноликов больше, чем крестиков?*

Ответ. Можно. ***Решение.*** См. решение задачи 5 для 5 класса.

• Только ответ «могло» — *0 баллов*. Есть верный пример или его описание — *7 баллов*. Нет верного примера или его описания — *0 баллов*.

Задача 5. *Каждый из десяти квадратных трехчленов $x^2+p_ix+q_i$ (i = 1, ..., 10) имеет два положительных корня, а сумма любых двух из этих трехчленов не имеет корней. Докажите, что если $p_1 < p_2 < \ldots < p_{10}$, то $q_1 > q_2 > \ldots > q_{10}$.*

Решение. Если между корнями одного трехчлена лежит корень a другого трехчлена, и коэффициенты при x^2 у этих трехчленов положительны, то вблизи a есть точка, где значения обоих этих трехчленов, а, значит, и их сумма отрицательны, а при достаточно больших значениях x значения обоих трехчленов, а, значит, и их суммы положительны. Поэтому в описанном случае сумма двух трехчленов имеет корни. Следовательно, если сумма двух трехчленов с положительными коэффициентами при x^2 не имеет корней, то отрезки с концами в корнях этих трехчленов не пересекаются.

Упорядочим корни трехчленов из условия в порядке убывания: $x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > x_{10} > y_{10} > 0$ (*). Из доказанного выше следует, что x_i и y_i — корни одного и того же трехчлена, коэффициент при x у которого равен $-(x_i+y_i)$ Заметим, что $-(x_1+y_1) < -(x_2+y_2) < \ldots < -(x_{10}+y_{10})$. Значит, x_i и y_i — корни трехчлена $x^2+p_ix+q_i$. Поэтому $q_1 = x_1y_1 < q_2 = x_2y_2 < \ldots < q_{10} = x_{10}y_{10}$, что и требовалось доказать.

Задача 6. *Как нужно разместить на плоскости треугольник, чтобы его проекция на данную прямую имела наименьшую длину?*

Ответ. Так, чтобы его наименьшая высота была параллельна данной прямой. ***Решение.*** Если треугольник размещен так, как указано в ответе, то его проекция на данную прямую l равна его наименьшей высоте. Покажем, что проекция треугольника на любую другую прямую не короче этой высоты. Для этого проведем через вершины A, B и C треугольника перпендикуляры a, b и c соответственно к прямой l. Выберем обозначения так, чтобы прямая c лежала между a и b. Тогда проекция треугольника ABC на l будет равна расстоянию между a и b. Теперь опустим из каждой вершины треугольника перпендикуляры на прямые a и b. Один из них, опущенный из какой-то вершины X, будет лежать между двумя другими, и потому будет пересекать сторону с концами в двух других вершинах треугольника в точке Y, лежащей между прямыми a и b. Отрезок XY не больше расстояния между прямыми a и b и не меньше высоты, опущенной из вершины X на противолежащую сторону треугольника, а та — не меньше наименьшей высоты треугольника, что и завершает доказательство.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. *Сколько решений имеет на интервале* $[0; \pi/2)$ *уравнение* $\text{tg}(\text{tg}x) = 1$?

Ответ. Бесконечно много. ***Решение.*** На интервале $[0; \pi/2)$ тангенс принимает все неотрицательные значения от 0 до $+\infty$, в том числе все значения вида $\pi/4+\pi k$, где k — натуральное число, при которых $\text{tg}(\text{tg}x) = 1$.

• Только ответ — *1 балл.*

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *и* $SABCD$ *— призма и пирамида с общим основанием* $ABCD$ *и равными объемами, лежащие по одну и ту же сторону от плоскости основания. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника* ASC *лежит в плоскости* $A_1B_1C_1$.

Решение. Так как объем призмы равен произведению площади основания на высоту, а объем пирамиды — трети произведения площади основания на высоту, высота пирамиды втрое больше высоты призмы. Значит, плоскость $A_1B_1C_1$ верхнего основания призмы втрое ближе к плоскости ABC, чем вершина S пирамиды, и потому делит в отношении $2:1$, считая от точки S, все отрезки, соединяющие точку S с точками плоскости ABC, в том числе и медиану треугольника ASC. Осталось заметить, что в том же отношении делит медианы треугольника точка их пересечения.

Задача 3. *Скоростное шоссе, по которому можно ехать со скоростью 150 км/ч, идет параллельно обычному, по которому можно ехать со скоростью 100 км/ч. Проехать 1 км по скоростному шоссе стоит 3 рубля, а по обычному — 1 рубль. Мише надо проехать из Ёлкина в Палкино, до которого 100 км. У него есть 250 рублей. За какое наименьшее время он может добраться до Палкина? Считаем, что разгон, торможение и переход с одного шоссе на другое происходят мгновенно.*

Ответ. За 45 минут. ***Решение.*** Понятно, что для того, чтобы как можно быстрее доехать до Палкина, нам надо проехать по скоростному шоссе как можно большее расстояние. Значит, мы должны проехать по скоростному шоссе такое расстояние x, чтобы оставшихся $250–3x$ рублей в точности хватило для проезда оставшихся $100–x$ километров до Палкина по обычному шоссе. Из уравнения $250–3x = 1\cdot(100–x)$ находим $x = 75$ км. Значит, наименьшее время, за которое Миша может добраться от Ёлкина до Палкина, составляет $75/150+(100–75)/100 = 3/4$ часа = 45 минут.

• Только ответ — *0 баллов*. Только ответ с верным планом проезда за наименьшее время — *2 балла*.

Задача 4. *Найдите все положительные целые числа* a*, большие 1, у которых куб суммы цифр равен* a^2.

Решение. См. решение задачи 5 для 9 класса.

• Только ответ — *1 балл*.

Задача 5. *Каждый из десяти квадратных трехчленов* $x^2+p_ix+q_i$ *(*$i = 1, ..., 10$*) имеет два корня, а сумма любых двух из этих трехчленов не имеет корней. Каково наибольшее возможное количество отрицательных чисел среди чисел* $p_1, p_2, ..., p_{10}, q_1, q_2, ..., q_{10}$*?*

Ответ. 11. ***Решение.*** В решении задачи 5 для 10 класса показано, что корни x_i, y_i данных в условии трехчленов $T_i = x^2+p_ix+q_i$ можно, переставив, если надо, их номера, упорядочить так: $x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > x_{10} > y_{10}$ (*). Чтобы свободный член $q_i = x_iy_i$ трехчлена T_i был отрицательным, необходимо, чтобы 0 находился между x_i и y_i. Из неравенств (*) следует, что такой свободный член может быть только один. Коэффициенты при x могут быть отрицательными все, если все корни, кроме y_{10}, положительны, и $x_{10}+y_{10} > 0$. Таким образом, отрицательных коэффициентов у трехчленов T_i не больше 11. Пример, когда их ровно 11: $x_1 = 20$, $y_1 = 19$, $x_2 = 18$, …, $x_9 = 4$, $y_9 = 3$, $x_{10} = 2$, $y_{10} = -1$.

Задача 6. *Как нужно разместить на плоскости треугольник, чтобы его проекция на данную прямую имела наименьшую длину?*

Решение. См. решение задачи 6 для 10 класса.

ИСТОЧНИКИ И АВТОРЫ ЗАДАЧ

Районный тур Одесской городской олимпиады, 1983/84 г.: 6–2 = 8–1.

Одесская областная олимпиада 1980/81 года, обобщение: 7–5, 9–5 = 11.4, 10.6 = 11.6.

Челябинская область, районно-городской тур, 1998, с изменением числовых данных: 7–4 = 8–3.

К. Кноп: 9–6.

Фольклор: 10–2.

Все остальные задачи составлены И. С. Рубановым специально для этой олимпиады.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Информация о победителях и призерах областной олимпиады 2023/24 г.

ДИПЛОМ I СТЕПЕНИ: *Федор Кротов, Нелли Рождественская* (оба — КФМЛ, 8 кл.), *Ульяна Кучина* (КЭПЛ, 9 кл.), *Игорь Чебыкин* (КФМЛ, 10 кл.).

ДИПЛОМ ПОБЕДИТЕЛЯ: *Степан Телицын* (КФМЛ, 6 кл. — за 7 кл.), *Анастасия Перминова* (КЭПЛ, 7 кл.), *Сергей Суровцев* (КФМЛ, 10 кл. — за 11 кл.), *Иван Девятьяров* (КФМЛ, 11 кл.).

ДИПЛОМ II СТЕПЕНИ: *Федор Маринин, София Мокрушина* (оба — КФМЛ, 8 кл.), *Ульяна Семенищева* (КЭПЛ, 8 кл.), *Михаил Ершов, Андрей Ходырев* (оба — КФМЛ, 9 кл.), *Иван Киселев, Арина Целищева* (оба — КФМЛ, 10 кл.).

ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ: *Денис Кочев, Дмитрий Сергеев* (оба — КФМЛ, 7 кл. — за 8 кл.), *Евгения Краскова* (КЭПЛ, 8 кл.), *Сергей Крюков* (ЛЕН, 8 кл.), *Федор Калинин, Артур Сансиев* (оба — КФМЛ, 8 кл.), *Марат Исмагилов* (КЭПЛ, 9 кл.), *Андрей Караваев* (школа 51, 9 кл.), *Мария Ларина, Александр Люков, Софья Новикова* (все — КФМЛ, 9 кл.), *Александр Бяков, Иван Колосов, Глеб Костицын* (все — КФМЛ, 10 кл.), *Тимофей Ивакин, Матвей Трифонов* (оба — КЭПЛ, 10 кл.).

ДИПЛОМ ПРИЗЕРА: *Полина Плаксина* (КФМЛ, 6 кл. — за 7 кл.), *Филипп Ганичев* (ВГГ, 7 кл.), *Никита Боровков, Дамир Гузаиров, Арсений Назарьян, Андрей Пленков, Матвей Рябов, Наталья Черных, Анна Чиркова* (все — КФМЛ, 7 кл.), *Илья Таланкин, Арсений Яшинин* (оба — КФМЛ, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНАЯ ГРАМОТА: *Максим Ворончихин, Лев Гремицкий, Ярослав Долженков, Илья Дурегин, Михаил Милькин* (все — КФМЛ, 9 кл.).

ПОХВАЛЬНЫЙ ОТЗЫВ I СТЕПЕНИ: *Всеволод Поскребышев* (КФМЛ, 10 кл.).

ПОХВАЛЬНЫЙ ОТЗЫВ II СТЕПЕНИ: *Людмила Ашихмина, Ксения Журавлева, Александр Пивоваров, Полина Старостина* (все — КФМЛ, 10 кл.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ХРОНИКА (ноябрь 2023 – октябрь 2024)

5 ноября состоялась онлайн-игра «Математический лабиринт» для 7-8 классов, в которой приняло участие 290 семиклассников и восьмиклассников из Кирова и области.

17 – 19 ноября состоялся Казанский турнир математических игр имени А.П. Нордена, в котором приняло участие 12 кировских команд. Команды «Киров 5-3», «Киров 6-1», «Киров 6-2» завоевали дипломы I степени, команды «Киров 5-1», «Киров 5-2», «Киров 5-5», «Киров 6-3», «Киров 6-4», «Киров 6-5», «Киров 6-6» — дипломы II степени, команды «Киров 5-1», «Киров 5-6» — дипломы III степени.

26 ноября-3 декабря в Пскове состоялся XXVI Кубок памяти А.Н. Колмогорова. Участвовало 66 команд, представлявших 16 городов России. Команда «Киров-10» заняла 7 место в первой лиге старшей группы, команда «Киров-9» — 7 место во второй лиге младшей группы.

17 декабря (для 7-11 кл.) и 14 января (для 4-6 кл.) состоялся второй (очный) тур олимпиады Юношеской математической школы (ЮМШ). На региональной площадке в ЦДООШ участвовало 104 кировчанина, из них 25 награждены дипломами и 34 похвальными отзывами.

11 февраля (для 6-8 кл.) и 3 марта (для 9-11 кл.) Санкт-Петербургская городская математическая олимпиада. 11 февраля эта олимпиада для кировчан проводилась под руководством члена её жюри Сергея Берлова непосредственно в Кирове, ученики 9-11 классов 3 марта соревновались в Санкт-Петербурге. 28 кировчан награждены дипломами и похвальными отзывами: *Степан Телицын, Сергей Суровцев* — дипломами II степени, *Федор Маринин*, *Глеб Костицын*, *Игорь Чебыкин* — дипломами III степени, *Арина Богдалова* (КЭПЛ, 6 кл.), *Амелия Агаева*, *Георгий Михалицын, Дмитрий Повещенко*, *Евгений Родин*, *Илья Чагаев*, *Мирон Митькиных*, *Никита Кудрявцев*, *Олег Наумов* (все — КФМЛ, 6 кл.), *Дмитрий Прокошев*, *Дмитрий Сергеев*, *Иван Птушкин*, *Ульяна Черезова* (все — КФМЛ, 7 кл.), *Анастасия Перминова* — похвальными отзывами, *Нелли Рождественская*, *Сергей Крюков*, *София Мокрушина*, *Ульяна Семенищева*, *Михаил Муравьев* — похвальными отзывами I степени, *Артур Сансиев*, *Федор Калинин*, *Федор Кротов*, *Всеволод Поскребышев* — похвальными отзывами II степени.

Январь, март. 34827 учащихся из Кировской области участвуют в математических конкурсах «Смарт-Кенгуру» и «Кенгуру».

23 – 25 февраля состоялся Казанский турнир математических игр имени П.А. Широкова. В нем участвовало 13 команд кировчан, из которых команды «Киров 5-1», «Киров 6-1», «Киров 6-2» завоевали дипломы I степени, команды «Киров 5-2», «Киров 6-3», «Киров 6-4» — дипломы II степени, команды «Киров 5-3», «Киров 5-6», «Киров 6-5», «Киров 6-6» — дипломы III степени.

8 – 11 марта. В г. Казани прошёл XV турнир математических флеш-боёв «Лига открытий», в которой участвовало 32 команды пятиклассников и 38 команд шестиклассников из 16 городов России. Команда «Киров-5» заняла первое место в высшей лиге среди 5 классов, команда «Киров-6» — второе место в высшей лиге среди 6 классов.

25 – 28 марта состоялся заключительный этап XVI олимпиады имени Леонарда Эйлера, проведённой для восьмиклассников России Кировским ЦДООШ и Московским Центром непрерывного математического образования. В нём приняли участие 304 учащихся 5-8 классов. Участники были распределены по территориальному признаку по четырём локальным финалам в Кирове, Новосибирске, Москве и Санкт-Петербурге. В финале участвовало 5 кировчан. *Нелли Рождественская* и *Ульяна Семенищева* завоевали похвальные грамоты.

7 апреля в режиме онлайн состоялась игра «Математическая абака». В ней приняло участие 142 учащихся 4 классов, 337 — 5 классов и 235 — 6 классов из Кирова и области.

14 апреля XX всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина (XXI устная олимпиада по геометрии, г. Москва). Кировчане участвовали на региональной площадке в ЦДООШ, 10 из них завоевали дипломы и грамоты: *Сергей Суровцев* — диплом I степени, *Андрей Ходырев, Игорь Чебыкин* — дипломы II степени, *Ульяна Семенищева, Ульяна Кучина* — дипломы III степени, *Лев Гремицкий*, *Михаил Ершов*, *Мария Ларина*, *Иван Киселев*, *Глеб Костицын* — похвальные грамоты.

19 – 25 апреля заключительный этап Всероссийской математической олимпиады школьников в г. Нижнем Новгороде. Участвовали кировчане: *Михаил Муравьев* (диплом призёра по 11 классу), *Иван Киселев, Сергей Суровцев*, *Игорь Чебыкин* (все трое — дипломы призёра по 10 классу), *Ульяна Кучина* (диплом призёра по 9 классу).

29 апреля – 5 мая LXII Уральский (XXXII Кировский) турнир юных математиков. Участвовало 106 команд, представлявших 21 город России. Команда «Киров 8-1» заняла 6 место в первой лиге старшей группы, «Киров 8-2» — 7 место во второй лиге старшей группы, «Киров 7-2» — 8 место в первой лиге младшей группы, «Киров 6-1» — 3 место в высшей лиге группы «Старт», «Киров 6-2» — 8 место в первой лиге группы «Старт», команда «КЭПЛ-6-1» — 1 место в третьей лиге группы «Старт», команда «Киров 7-1» участвовала во второй лиге младшей группы, команды «Киров 5-1», «Киров 5-2», «КЭПЛ-5», «КЭПЛ-6-2» — в третьей лиге группы «Старт».

17 – 19 мая. Казанский турнир математических игр имени Н.Г. Чеботарева. 6 команд кировчан участвовало в этом турнире. Команда «Киров 5-2» завоевала диплом I степени, команды «Киров 5-1» и «Киров 5-3» — дипломы III степени.

1 – 26 июля. XXXX Летняя многопредметная школа Кировской области. 410 учащихся (в том числе 310 математиков), среди которых 296 иногородних из 20 регионов России.

30 июля – 2 августа. Финальный тур XX олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина (г. Дубна, Московская обл.). Участвовали кировчане: *Ульяна Семенищева* (диплом III степени), *Сергей Суровцев* (диплом III степени), *Ульяна Кучина* (похвальная грамота), *Ходырев Андрей, Глеб Костицын*.

3 – 11 августа. *Сергей Суровцев* участвовал в 36-й Международной конференции Турнира городов (Республика Татарстан, г. Иннополис).

По итогам **45 Турнира городов**, проходившего в 2023/24 учебном году, 57 школьников из Кировской области награждены дипломами победителей.

20 – 23 сентября. В г. Казани прошёл XVI турнир математических флеш-боёв «Лига открытий», в которой участвовало 32 команды шестиклассников и 14 команд семиклассников из 10 городов России. Команда «Киров-6» заняла первое место в третьей лиге среди 6 классов, команда «Киров-7» — четвертое место в высшей лиге среди 7 классов.

6 октября состоялась онлайн-игра «Математический кросс», в которой приняли участие 378 пятиклассников из Кирова и области.

11 – 15 октября III Южно-Российская математическая олимпиада для девочек "Ассара" (Республика Адыгея, г. Майкоп). Участвовали 3 кировчанки. *Ульяна Кучина* и *Ульяна Семенищева* завоевали дипломы I степени, *Нелли Рождественская* — диплом II степени.

20 октября состоялась онлайн-игра «Математическое многоборье». В ней приняло участие 276 шестиклассника из Кирова и области.

31 октября – 2 ноября. В парке-отеле «Покровское» (Московская область, Одинцовский городской округ) прошёл LXIII Уральский турнир юных математиков. Участвовало 102 команды, представлявшие 25 городов России. Команда «Киров-8» заняла 2 место во второй лиге старшей группы, команда «Киров-7» — 4 место в первой лиге младшей группы, команда «Киров-6» заняла 8 место в высшей лиге группы «Старт».