



XXXIX РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА, 2012

**ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ,
МЕТОДИЧЕСКИЕ
РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Киров
2012**

*Оргкомитету и жюри муниципального этапа
математической олимпиады школьников*

Уважаемые коллеги!

В начале олимпиады напомните участникам, что нужно не только приводить ответы, но и *обосновывать* их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ — лишь его результат).

Продолжительность олимпиады составляет для 5-7 кл. — 2,5 часа, для 8 кл. — 3 часа, для 9 кл. — 3,5 часа, для 10-11 кл. — 4 часа, не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.

После олимпиады (лучше всего — в тот же день) просим провести разбор задач для ее участников.

Отзывы об этой брошюре и олимпиадных заданиях направляйте по адресу: 610005, г. Киров, 5, а/я 1026, ЦДООШ, И.С.Рубанову.

Автор благодарен А.В. Черанёвой, О.В. Старостиной, И.А. Семёновой, Е.М. Ковязиной, О.В. Рубановой за полезные обсуждения и критику.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. Решение каждой задачи, независимо от её трудности, оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7, дробные оценки не допускаются.

2. При оценке рассуждений в олимпиадных работах, как правило, сначала дается ответ на принципиальный вопрос: являются ли решением задачи (хотя, может быть, и с различными недостатками) или не являются (хотя, может быть, и содержат существенное продвижение в направлении решения). В первом случае оценка должна быть не ниже 4, во втором — не выше 3.

3. По проверке и оценке решений большинства задач мы даём конкретные указания. Они помещаются после наших решений и отмечены значком •. В случаях, не предусмотренных конкретными указаниями, оценка определяется по следующим общим правилам:

Оценка	З а ч т о с т а в и т с я
7	Верное решение
6	Верное решение с небольшими недочётами
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты
4	Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно
3	Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении
1-2	Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Решение, выполненное более чем наполовину, считается *существенно неполным*, если:

- ✓ содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- ✓ при верной общей схеме рассуждений явно или скрыто опирается на важные недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными;
- ✓ состоит в разборе нескольких возможных случаев, и хотя бы один *существенный* случай упущен или разобран неверно;
- ✓ состоит из двух частей (например, доказательства необходимости и достаточности либо доказательства оценки и построения примера), из которых верно выполнена только одна, причём более сложная.

При расхождении между общими и конкретными указаниями применяются конкретные.

4. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за «нерациональность» решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено конкретными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, пометки и т.п.***

5. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего — логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *не вычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочетам.

6. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике. Умение хорошо *догадываться* на олимпиаде должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение.

Если участник владеет нужным обоснованием, но не может связно изложить его, *роль обоснования могут в известной мере сыграть черновые записи и рисунки, раскрывающие ход мысли автора*. Поэтому при проверке надо ***просматривать все черновики***, причем недостатки, которых нет в чистовике, не учитываются, но учитываются все, что может улучшить чистовик. Еще эффективнее в этом отношении *проверка работы в присутствии ее автора*, вполне возможная, если участников немного.

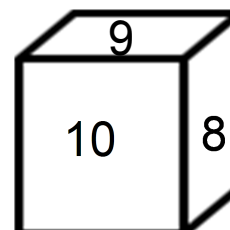
7. Ответ, найденный логическим путем, как правило, оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 5 КЛАССА

Задача 1. Буратино хочет записать на доске выражение, значение которого равно 2012, используя только нечётные цифры, а также знаки арифметических операций. За каждую цифру и каждый знак арифметической операции он платит Карабасу–Барабасу по одной монете. У Буратино есть семь монет. Помогите ему.

Решение. Например, $1999+13$, $1997+15$ и др.

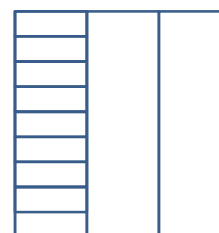
Задача 2. На гранях кубика записаны шесть различных положительных целых чисел. На передней грани написано число 10, на верхней — число 9, на правой — число 8 (см. рисунок). Какие числа написаны на левой, нижней и задней гранях, если известно, что суммы чисел, написанных на противоположных гранях, равны, а число 8 делится на число, написанное на левой грани. Объясните, как был найден ответ.



Ответ. На левой грани написано число 4, на задней — 2, на нижней — 3.

Решение. Так как на левой грани написан делитель числа 8, там либо 4, либо 2, либо 1. Но сумма чисел, написанных на противоположных гранях, должна быть больше 10. Поэтому на левой грани написано число 4, и сумма чисел на противоположных гранях равна 12. Значит, на задней грани написано число $12-10=2$, а на нижней — число $12-9=3$.

Задача 3. Как без остатка разрезать квадрат на 11 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон втрое длиннее другой? Пример рисуйте по клеточкам!



Решение. См. рисунок справа.

Задача 4. Собрались 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. 99 из собравшихся произнесли такую фразу: «99 из нас — лжецы». Сколько лжецов могло быть за столом? Укажите все возможности и постарайтесь объяснить, почему других возможностей нет.

Ответ. 100. **Решение.** Если за столом было больше одного рыцаря, то один из рыцарей обязательно высказался, и сказал он неправду, потому что лжецов за столом было меньше 99. Противоречие. Если за столом был ровно один рыцарь, то по крайней мере 98 лжецов сказали правду — снова противоречие. Если же все за столом были лжецами, то 99 из них, как им и положено, солгали, и противоречия не возникает. **Примечание.** Вот возможное неверное решение: «Пусть среди собравшихся есть рыцарь. Тогда он сказал правду, и за столом 99 лжецов. Но тогда и лжецы сказали правду — противоречие.» Дело в том, что если рыцарь за столом только один, он может оказаться как раз тем единственным, кто не высказался вообще.

Задача 5. В 1001 году на багдадском базаре ковёр-самолёт стоил 1 динар. Затем в течение 99 лет он каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год подорожал в 2 раза. В каком году произошло подорожание в 2 раза, если в 1100 году такой же ковёр-самолёт стоил 152 динара? Ответ объясните.

Ответ. В 1054 году. **Решение.** Если бы ковёр-самолёт каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год не дорожал бы совсем, то в 1100 году он стоил бы $1+98=99$ динаров. Значит, в результате подорожания вдвое к стоимости ковра добавились $152-99=53$ динара. Но в результате подорожания вдвое к стоимости ковра

добавляется она же, то есть в год перед подорожанием ковёр стоил 53 динара. Значит, год перед подорожанием был 1053-й, а год подорожания — 1054-й.

♦ См. также задачу 5 для 6 класса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. За любой верный пример — 7 баллов. При отсутствии верного примера — 0 баллов.

Задача 2. За ответ без объяснения, почему он только один — 3 балла. Объяснение оценивается из оставшихся 4 баллов.

Задача 3. За любой верный пример — 7 баллов. При отсутствии верного примера — 0 баллов.

Задача 4. За ответ без объяснения, почему он только один — 1 балл. За объяснение, почему за столом не может быть 99 лжецов — 3 балла. За объяснение, почему за столом не может быть меньше 99 лжецов — 3 балла. Все указанные баллы суммируются.

За неверное рассуждение типа описанного в примечании к нашему решению — 0 баллов.

Задача 5. За ответ без всякого объяснения — 0 баллов. За ответ с проверкой его правильности, но без рассуждения, из которого видно, почему других ответов нет — 3 балла. Если автор решения забывает вычесть из 99 единицу, и у него получается, что в год перед подорожанием ковёр стоил не 152–99, а 152–100 динаров, решение оценивается не выше, чем в 3 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 6 КЛАССА

Задача 1. Все цифры в записи шестизначного числа различны, и среди них нет нуля. Первая его цифра в 8 раз больше четвёртой, вторая — вдвое больше пятой, третья — втрое больше шестой. Найдите все такие числа и постарайтесь объяснить, почему других таких чисел нет.

Ответ. 849123. **Решение.** Первая цифра искомого числа — не 0 и делится на 8. Единственная такая цифра — это 8. Следовательно, четвёртая цифра — 1. Заметим, что пятая цифра не больше 4, а шестая — не больше 3, иначе вторая или третья цифра оказалась бы больше 9. При этом пятая цифра не равна 4, иначе вторая цифра равнялась бы первой.

Итак, пятая цифра равна 2 или 3, и шестая — тоже. Но если число оканчивается на 32, то вторая и третья цифры у него одинаковы. Поэтому единственное искомое число — 849123.

Задача 2. Такова же, как задача 3 5 класса.

Задача 3. Ане и Ване вместе 36 лет. Сколько лет Ане, если десять лет назад она была в семь раз младше Вани?

Ответ. 12 лет. **Решение.** Пусть Ане x лет. Тогда Ване $36-x$ лет. По условию $(36-x)-10 = 7(x-10)$. Решая это уравнение, находим ответ.

Задача 4. В семи маленьких банках меньше краски, чем в четырёх больших. Петя купил 6 больших банок краски, а Вася — 10 маленьких. Кто из них купил больше краски? Ответ объясните.

Ответ. Больше краски купил Петя. **Решение.** Возьмем 4 Петиных и 7 Васиных банок. По условию в Петиных банках краски больше. Остались 2 Петиных и 3 Васиных банки. Поскольку в 4 больших банках больше краски, чем в 6 маленьких, в 2 больших банках больше краски, чем в 3 маленьких, так что в оставшихся Петиных банках также больше краски, чем в оставшихся Васиных.

Задача 5. В 1001 году на багдадском базаре ковёр-самолёт стоил 1 динар. Затем в течение 99 лет он каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год подорожал в 3 раза. Мог ли в 1100 году такой же ковёр-самолёт стоить 152 динара? Ответ объясните.

Ответ. Не мог. **Решение.** Если бы ковёр-самолёт каждый год, кроме одного, дорожал на 1 динар, а в один год не дорожал бы совсем, то в 1100 году он стоил бы $1+98 = 99$ динаров. Значит, в результате подорожания втрое к стоимости ковра добавились $152-99 = 53$ динара. Но в результате подорожания втрое к стоимости ковра добавляется удвоенная его стоимость, то есть чётное число, а число 53 — нечётное.

♦ См. также задачу 5 для 5 класса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. За указание искомого числа — 3 балла, объяснение, почему других искомым чисел нет, оценивается из 4 баллов.

Задача 2. За любой верный пример — 7 баллов. При отсутствии верного примера — 0 баллов.

Задача 3. За верный ответ без всяких пояснений — 1 балл. За верный ответ с проверкой его правильности, если из проведённых рассуждений не видно, почему других ответов нет — 3 балла. Если уравнение по условию задачи верно составлено, но неверно решено — 3 балла.

Задача 4. За ответ без обоснования — 0 баллов.

Задача 5. За ответ без обоснования — 0 баллов.

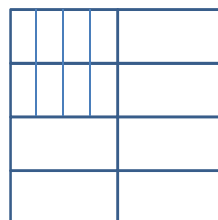
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

Задача 1. Перед распродажей ложка и вилка стоили одинаково. На распродаже цену ложки уменьшили на 1 рубль, а цену вилки — в 10 раз. Могло ли случиться, что ложка на распродаже продавалась дешевле вилки?

Ответ. Да, могло. **Решение.** Например, если до распродажи ложка и вилка стоили по 1 рублю 10 копеек, на распродаже ложка стоила 10 копеек, а вилка — 11.

Задача 2. Как без остатка разрезать квадрат на 14 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон вдвое длиннее другой? Пример рисуйте по клеточкам!

Решение. Например, так, как на рисунке справа. Сторона квадрата равна 8, короткие стороны самых маленьких прямоугольников — 1.



Задача 3. Найдите все трёхзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

Ответ. 108. **Решение.** Пусть $\overline{abc}$ — искомое трёхзначное число. Это значит, что $100a+10b+c = 12(a+b+c) \Leftrightarrow 88a-11c = 2b$. В последнем равенстве левая часть де-

лится на 11. Значит, на 11 делится и $2b$, что возможно только при $b = 0$. Таким образом, $88a - 11c = 0 \Leftrightarrow c = 8a$. Последнее равенство возможно только при $a = c = 0$ или при $a = 1, c = 8$. Поскольку первая цифра трёхзначного числа не может быть нулём, возможен только случай $a = 1, c = 8$, то есть единственное искомое число — 108.

Задача 4. Такова же, как задача 5 5 класса.

Задача 5. Можно ли записать на доске 20 натуральных чисел (среди которых могут быть и одинаковые) так, чтобы каждое из них делилось ровно на 10 из остальных?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Допустим, можно. Пусть n — самое маленькое из записанных на доске чисел. На доске, кроме него, записаны 10 его делителей. Поскольку все числа, на которые делится n , не превосходят n , на доске должно быть записано ещё ровно 10 чисел, равных n . Получается, что число n записано на доске 11 раз. Заметим, что ни одно из остальных девяти записанных на доске чисел не делится на n : иначе получилось бы, что одно из них делится на 11 других записанных. Но тогда каждое из этих девяти чисел делится не больше, чем на 8 из остальных записанных на доске чисел — противоречие.

♦ См. также задачи 5 8 класса, 4 9 класса и 5 10 класса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. За любой верный пример — 7 баллов. За ответ «не могло» без обоснования — 0 баллов.

Задача 2. За любой верный пример — 7 баллов. При отсутствии верного примера — 0 баллов.

Задача 3. За ответ без объяснения, почему других искомых чисел нет — 3 балла. Объяснение оценивается из оставшихся 4 баллов. Наличие или отсутствие разбора случая $a = c = 0$ на оценку не влияет.

Задача 4. За ответ без всякого объяснения — 0 баллов. За ответ с проверкой его правильности, но без рассуждения, из которого видно, почему других ответов нет — 3 балла. Если автор решения забывает вычесть из 99 единицу, и у него получается, что в год перед подорожанием ковёр стоил не 152–99, а 152–100 динаров, решение оценивается не выше, чем в 3 балла.

Задача 5. За ответ без обоснования — 0 баллов. Показано, что на доске есть 11 равных чисел, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. Пётр и Фёдор нанялись на работу. При расчёте Пётр получил за каждый проработанный день столько рублей, сколько дней проработал, а Фёдор проработал на день меньше Петра, но за каждый проработанный день получил на рубль больше. Кто из них заработал больше и на сколько?

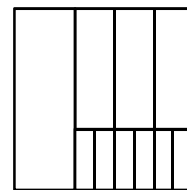
Ответ. Пётр получил на рубль больше. **Решение.** Пусть Пётр проработал n дней. Тогда он заработал n^2 рублей, а Фёдор — $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ рублей.

♦ Эту задачу можно решить и без формул. Вырежем из бумаги клетчатый квадрат,отрежем от него полосу шириной в клетку, укоротим её на одну клетку и приставим длинной стороной к короткой стороне получившегося прямоугольника.

Получим прямоугольник, у которого одна из сторон на клетку короче, а другая — на клетку длиннее, чем у квадрата. Так доказывал алгебраические факты Пифагор.

Задача 2. Как без остатка разрезать квадрат на 10 прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон втрое длиннее другой? Пример рисуйте по клеточкам!

Решение. Например, как на рисунке справа. Сторона квадрата равна 9, короткие стороны самых маленьких прямоугольников — 1.



Задача 3. Точка D лежит внутри треугольника ABC . Самая короткая сторона треугольника BCD равна 1, самая короткая сторона треугольника ACD равна 2, самая короткая сторона треугольника ABD равна 3. Докажите, что расстояние от точки D до ближайшей к ней вершины треугольника ABC не превосходит 2.

Решение. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда все три отрезка AD , BD , CD длиннее 2. Потому в треугольниках BCD и ACD самые короткие стороны — это BC и AC соответственно, то есть $BC = 1$, $AC = 2$. Но в треугольнике ABD кратчайшая сторона равна 3. Поэтому получается, что $AB \geq 3 = 2 + 1 = AC + BC$. Но сторона треугольника должна быть короче суммы двух других. Противоречие.

Задача 4. Такова же, как задача 5 для 6 класса.

Задача 5. Можно ли записать на доске 20 натуральных чисел (среди которых могут быть и одинаковые) так, чтобы каждое из них делилось ровно на шесть из остальных?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Допустим, можно. Пусть n — самое маленькое из записанных на доске чисел. На доске, кроме него, записаны 6 его делителей. Поскольку все числа, на которые делится n , не превосходят n , на доске должно быть записано ещё ровно 6 чисел, равных n . Получается, что число n записано на доске 7 раз. Заметим, что ни одно из остальных 13 записанных на доске чисел не делится на n : иначе получилось бы, что одно из них делится на 7 других записанных. Поэтому, стерев эти 7 чисел, мы получим 13 чисел, удовлетворяющих условию задачи. Пусть m — самое маленькое из них. Повторив проведённое выше рассуждение, получим, что на доске 7 раз написано число m и, кроме того, ещё какие-то шесть чисел, не делящихся на m . Но тогда каждое из этих шести чисел делится, самое большее, на 5 из остальных записанных на доске чисел — противоречие.

♦ См. также задачи 5 7 класса, 4 9 класса и 5 10 класса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. За ответ без обоснования — 1 балл.

Задача 2. За любой верный пример — 7 баллов. При отсутствии верного примера — 0 баллов.

Задача 3. «Доказательство» приведением конкретного примера — 0 баллов.

Задача 4. За ответ без обоснования — 0 баллов.

Задача 5. За ответ без обоснования — 0 баллов. Показано, что на доске есть 7 равных чисел, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. Положительное число x меньше 1, а число y меньше -1 . Расположите числа x , x^2 , y , y^2 , y^3 в порядке возрастания.

Ответ. $y^3 < y < x^2 < x < y^2$. **Решение.** Поскольку $y < -1$, $y^3 < y < 0$, а $y^2 > 1$. Далее, $0 < x^2 < x$, так как $0 < x < 1$. Из полученных неравенств следует ответ.

Задача 2. Половина живущих в пруду рыб — караси, третья часть — плотва, седьмая часть — окуни. Сколько рыб живёт в пруду, если их там больше 50, но меньше 100?

Ответ. 84. **Решение.** Из условия следует, что общее число живущих в пруду рыб делится на 2, 3 и 7. Единственное число между 50 и 100, делящееся на 2, 3 и 7, — это 84.

Задача 3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E , а на биссектрисе BD — точка F . Оказалось, что $EF \parallel AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

Решение. Поскольку $AF = AD$, $\angle AFD = \angle FDA$. Поскольку $EF \parallel AC$, $\angle FDA = \angle EFD$. Таким образом, углы AFD и EFD равны. Значит, равны и смежные с ними углы BFA и BFE . Кроме того, по условию равны углы ABF и EBF . Получается, что треугольники BFA и BFE равны по общей стороне BF и двум прилежащим к ней углам. Поэтому равны и их соответственные стороны AB и BE .

Задача 4. Можно ли записать на доске 30 натуральных чисел (среди которых могут быть и одинаковые) так, чтобы каждое из них делилось ровно на 15 из остальных?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Допустим, можно. Пусть n — самое маленькое из записанных на доске чисел. На доске, кроме него, записаны 15 его делителей. Поскольку все числа, на которые делится n , не превосходят n , на доске должно быть записано ещё ровно 15 чисел, равных n . Получается, что число n записано на доске 16 раз. Заметим, что ни одно из остальных 14 записанных на доске чисел не делится на n : иначе получилось бы, что одно из них делится на 16 других записанных. Но тогда каждое из этих 14 чисел делится, самое большее, на 13 из остальных записанных на доске чисел — противоречие.

♦ См. также задачи 5 для 7, 8 и 10 классов.

Задача 5. Шестизначное число N совпадает с каждым из пяти шестизначных чисел A , B , C , D , E в трёх разрядах. Докажите, что среди чисел A , B , C , D , E найдутся два, совпадающие по крайней мере в двух разрядах.

Решение. Запишем число N и поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом A . Затем поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом B и т.д. В итоге мы поставим 15 крестиков. Значит, найдётся разряд, под которым крестиков не меньше трёх. Поэтому среди чисел A , B , C , D , E найдутся три, совпадающие в одном из разрядов (назовём его *отмеченным*). Оставим только крестики, соответствующие этим числам и не стоящие в отмеченном разряде. Их шесть, а не отмеченных разрядов — пять, поэтому среди них найдутся два, стоящие в одном разряде. Числа, соответствующие этим крестикам — искомые: они совпадают в этом разряде, а также в отмеченном.

♦ См. также задачу 5 11 класса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. За верный ответ — 4 балла, обоснование — из 3 баллов.

Задача 2. За верный ответ — 3 балла, обоснование — из 4 баллов.

Задача 3. Дополнительных указаний нет.

Задача 4. За ответ без обоснования — 0 баллов. Показано, что на доске есть 16 равных чисел, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

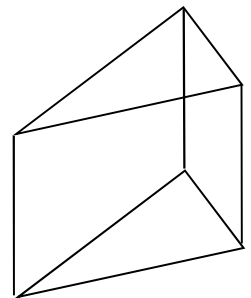
Задача 5. Перебор случаев, не доведённый до полного решения — не более 1 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. В степи растут дуб, тополь и липа. От дуба до ближайшего из двух других деревьев — 1 километр, от липы до ближайшего из двух других деревьев — 2 километра. Каким может быть расстояние от тополя до ближайшего из двух других деревьев?

Ответ. 1 километр. **Решение.** Липа не может быть деревом, ближайшим к дубу: иначе расстояние от неё до ближайшего из двух других деревьев было бы не больше 1 километра, а по условию оно равно 2 километрам. Значит, ближайшее к дубу дерево — тополь. При этом от липы до тополя не меньше 2 километров. Таким образом, ближайшее к тополю дерево — это дуб, и до него от тополя 1 километр.

Задача 2. Можно ли расставить в вершинах треугольной призмы (см. рисунок) шесть каких-либо положительных чисел так, чтобы суммы чисел на всех пяти ее гранях были одинаковы?



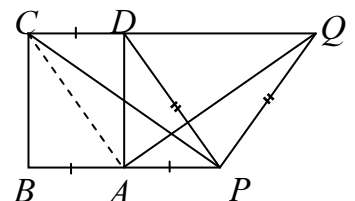
Ответ. Нельзя. **Решение.** Допустим, числа расставлены так, что их сумма на каждой грани равна S . Каждое из чисел находится либо на верхней грани, либо на нижней. Значит, сумма всех шести чисел должна равняться $2S$. С другой стороны, если сложить суммы чисел на трёх боковых гранях, то каждое из шести чисел будет сочтано дважды, то есть удвоенная сумма всех шести чисел должна равняться $3S$. Получается, что $4S = 3S$, откуда $S = 0$. Но из условия следует, что $S > 0$. Противоречие.

Задача 3. Графики функций $y = ax + b$ и $y = cx + d$ пересекаются в первой четверти. Докажите, что $ad + bc > ab + cd$.

Решение. Из уравнения $ax + b = cx + d$ находим абсциссу точки пересечения графиков: $x = (d - b)/(a - c)$. Поскольку точка пересечения находится в первой четверти, имеем $(d - b)/(a - c) > 0$. Умножив обе части последнего неравенства на $(a - c)^2$, получаем неравенство $(d - b)(a - c) > 0 \Leftrightarrow ad + bc - ab - cd > 0 \Leftrightarrow ad + bc > ab + cd$.

Задача 4. Дан прямоугольник $ABCD$. На продолжении стороны AB за точку A отмечена такая точка P , что $AP = AB$, а на продолжении стороны CD за точку D отмечена такая точка Q , что $PQ = PD$. Докажите, что $PC = AQ$.

Решение. Поскольку $AP = AB = CD$, $CDPA$ — параллелограмм, поэтому $CA = DP = QP$, то есть $CA PQ$ — равнобедренная трапеция. Поскольку PC и AQ — ее диагонали, они равны.



Задача 5. Можно ли записать на доске 2012 натуральных чисел (среди которых могут быть и одинаковые) так, чтобы каждое из них делилось ровно на 12 из остальных?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Допустим, можно. Пусть n — самое маленькое из записанных на доске чисел. На доске, кроме него, записаны 12 его делителей. Поскольку все числа, на которые делится n , не превосходят n , на доске должно быть записано ещё ровно 12 чисел, равных n . Получается, что число n записано на доске 13 раз. Заметим, что ни одно из остальных записанных на доске чисел не делится на n : иначе получилось бы, что оно делится по крайней мере на 13 других записанных. Поэтому, стерев 13 чисел, равных n , мы получим $2012 - 13 = 1999$ чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Поскольку $2012 = 13 \cdot 154 + 10$, совершив описанную выше процедуру 154 раза, мы оставим на доске 10 чисел, удовлетворяющих условию задачи, что, очевидно, невозможно.

♦ См. также задачи 5 для 7 и 8 классов и 4 9 класса.

♦ Из решения задачи ясно, что записать на доске n натуральных чисел, каждое из которых делится ровно на k из остальных, можно тогда и только тогда, когда n делится на $k+1$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. За верный ответ — 1 балл, обоснование — из 6 баллов. Конкретный пример расположения деревьев — не обоснование.

Задача 2. За ответ без обоснования — 0 баллов. Если из равенства $4S = 3S$ (или другого аналогичного) делается вывод о невозможности расстановки чисел без ссылки на их положительность, оценка снижается на 2 балла.

Задача 3. Замечено, что $(d-b)/(a-c) > 0$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 2 балла.

Задача 4. Замечено, что $CDPA$ — параллелограмм, дальнейшего содержательного продвижения нет — 1 балл.

Задача 5. За ответ без обоснования — 0 баллов. Показано, что на доске есть 13 равных чисел, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла. За неверное деление с остатком, не повлиявшее на логику решения, — штраф 1 балл.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. Докажите, что если у трёх чисел одинаковые синусы, то среди них найдутся два, у которых одинаковы и косинусы.

Решение. Поскольку $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, косинусы всех трёх данных чисел равны по модулю. При этом какие-то два из них имеют одинаковые знаки, откуда и вытекает утверждение задачи.

Задача 2. Графики функций $y = ax + b$ и $y = cx + d$ пересекаются в третьей четверти. Докажите, что $ad + bc < ab + cd$.

Решение. Из уравнения $ax + b = cx + d$ находим абсциссу точки пересечения графиков: $x = (d-b)/(a-c)$. Поскольку точка пересечения находится в третьей четверти, имеем $(d-b)/(a-c) < 0$. Умножив обе части последнего неравенства на $(a-c)^2$, получаем неравенство $(d-b)(a-c) < 0 \Leftrightarrow ad + bc - ab - cd < 0 \Leftrightarrow ad + bc < ab + cd$.

Задача 3. Такова же, как задача 4 10 класса.

Задача 4. Можно ли выбрать в пространстве 101 прямую так, чтобы среди них не было параллельных, и любая из них была перпендикулярна плоскости, проходящей через какие-то две другие выбранные прямые?

Ответ. Можно. **Решение.** Зафиксируем в пространстве прямую a и перпендикулярную ей плоскость α . Через точку A их пересечения в плоскости α проведём 50 различных пар взаимно перпендикулярных прямых: $b_1 \perp c_1, \dots, b_{50} \perp c_{50}$. Прямые $a, b_1, c_1, \dots, b_{50}, c_{50}$ — искомые. В самом деле, прямая a перпендикулярна плоскости α , проходящей через прямые b_1 и c_1 , прямая b_i — плоскости, проходящей через прямые a и c_i , а прямая c_i — плоскости, проходящей через прямые a и b_i .

Задача 5. а) Семизначное число N совпадает с каждым из восьми семизначных чисел $M_1, M_2, \dots, M_8$ в трёх разрядах. Докажите, что среди чисел $M_1, M_2, \dots, M_8$ найдутся два, совпадающие по крайней мере в двух разрядах.

Решение. Запишем число N и поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом M_1 . Затем поставим по крестику под цифрами в тех разрядах, в которых число N совпадает с числом M_2 и т.д. В итоге мы поставим 24 крестика. Значит, найдётся разряд, под которым крестиков не меньше четырёх. Поэтому среди чисел $M_1, M_2, \dots, M_8$ найдутся четыре, совпадающие в одном из разрядов (назовём его *отмеченным*). Оставим только крестики, соответствующие этим числам и не стоящие в отмеченном разряде. Их 8, а не отмеченных разрядов — 6, поэтому среди этих крестиков найдутся два, стоящие в одном разряде. Числа M_i и M_j , соответствующие этим крестикам — искомые: они совпадают в этом разряде, а также в отмеченном.

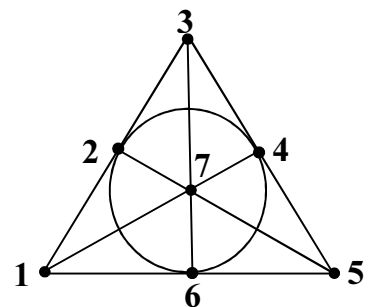
б) Семизначное число N совпадает с каждым из семи семизначных чисел $M_1, M_2, \dots, M_7$ в трёх разрядах. Обязательно ли среди чисел $M_1, M_2, \dots, M_7$ найдутся два, совпадающие по крайней мере в двух разрядах?

Ответ. Не обязательно. **Решение.** Вот пример, где любые два из чисел M_i и M_j совпадают только в одном разряде: $N = 1234567$, $M_1 = 1235678$, $M_2 = 2334589$, $M_3 = 1446560$, $M_4 = 1554797$, $M_5 = 3267507$, $M_6 = 4638867$, $M_7 = 5274961$.

♦ На рисунке справа показана геометрическая конструкция, с помощью которой был построен приведённый выше пример. Семь точек соответствуют семи разрядам, семь линий (шесть отрезков и окружность) — числам $M_1 - M_7$, совпадения цифр числа M_i с цифрами числа N происходят в разрядах, отвечающих точкам, лежащим на соответствующей линии. Поскольку на каждой линии лежат по три точки, и каждые две линии пересекаются в единственной точке, дописав недостающие цифры в числах M_i так, чтобы они у разных чисел не совпадали, мы получаем искомый пример.

Конструкция на рисунке представляет собой модель проективной плоскости над двухэлементным полем $\mathbf{Z}_2$, состоящей из семи точек и семи проективных прямых.

♦ См. также задачу 5 9 класса.



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ

Задача 1. Дополнительных указаний нет.

Задача 2. Замечено, что $(d-b)/(a-c) < 0$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 2 балла.

Задача 3. Замечено, что $CDPA$ — параллелограмм, дальнейшего содержательного продвижения нет — 1 балл.

Задача 4. За ответ без обоснования — 0 баллов. За верный пример расположения 101 прямой — 4 балла, его обоснование — из 3 баллов.

Задача 5. а) Пункт оценивается из 4 баллов. Перебор случаев, не доведённый до полного решения — 0 баллов. **б)** За любой верный пример — 3 балла, при отсутствии верного примера (в частности, за ответ без обоснования) — 0 баллов. Внимательно проверяйте правильность примеров!

ИСТОЧНИКИ И АВТОРЫ ЗАДАЧ

Олимпиада «Путь к Олимпу», г. Омск, 2011 год: 5-2, 5-5 = 7-4.

И. Рубанов по мотивам задачи 5-5: 6-5, 8-4

Новосибирская устная олимпиада, 2010 год: 5-4.

Турнир им. Ломоносова, г. Москва, 1987 год (упрощение): 7-3.

18 Уральский турнир юных математиков, автор С. Берлов: 9-3.

23 Уральский турнир юных математиков, автор И. Рубанов: 10-2.

20 Уральский турнир юных математиков, автор Ю. Лифшиц: 10-4 = 11-3.

Фольклор: 6-3, 8-1, 9-1, 9-2.

Остальные задачи составлены И. Рубановым специально для этой олимпиады.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Информация о победителях и призёрах областной олимпиады 2011/12 г.

ПОБЕДИТЕЛИ (ДИПЛОМ I СТЕПЕНИ): Пахомов Дмитрий (СОШ с УИОП, г. Омутнинск, 7 кл.), Нуждов Глеб (КФМЛ, 8 кл.), Васильчишин Сергей (КФМЛ, 8 кл.), Кочкин Иван (КФМЛ, 9 кл.), Смердов Антон (КФМЛ, 9 кл.), Малыгин Виталий (КФМЛ, 10 кл.), Козицын Никита (КФМЛ, 11 кл.), Рахматулин Ян (КФМЛ, 11 кл.).

ПРИЗЁРЫ (ДИПЛОМ II СТЕПЕНИ): Зяблицев Владимир (Киров, лицей 21, 7 кл.), Шишкин Михаил (КФМЛ, 8 кл.), Шарафутдинов Азат (КФМЛ, 9 кл.), Широких Борис (КФМЛ, 9 кл.), Корякин Данил (КФМЛ, 10 кл.), Латышев Алексей (КФМЛ, 10 кл.), Рычков Артём (КФМЛ, 10 кл.), Котельникова Дарья (КФМЛ, 11 кл.), Маракулин Роман (КФМЛ, 11 кл.).

ПРИЗЁРЫ (ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ): Анисимова Дарья (г. Кирово-Чепецк, гимназия 1, 7 кл.), Назарова Дарья (КФМЛ, 7 кл.), Рогозина Анна (КФМЛ, 8 кл.), Будин Николай (КФМЛ, 8 кл.), Бураков Иван (лицей г. Кирово-Чепецка, 8 кл.), Марков Илья (КФМЛ, 10 кл.), Парфин Кирилл (КФМЛ, 10 кл.), Софронова Алина (КФМЛ, 10 кл.), Куклин Иван (КФМЛ, 11 кл.), Горячевский Александр (СОШ г. Лузы, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНАЯ ГРАМОТА: Арасланов Роман (Киров, ЛЕН, 7 кл.), Рубанов Илья (КФМЛ, 8 кл.), Керов Владимир (СОШ с УИОП, г. Омутнинск, 8 кл.), Князева Анастасия (СОШ 5 г. Кирово-Чепецка, 8 кл.), Кропанева Виктория (КФМЛ, 9 кл.), Марьин Егор (КФМЛ, 10 кл.), Казанцев Александр (КФМЛ, 10 кл.), Филимонова София (КФМЛ, 10 кл.), Колупаев Владислав (КФМЛ, 10 кл.), Тюльпанова Екатерина (КФМЛ, 10 кл.), Князева Ксения (Лицей г. Кирово-Чепецка, 10 кл.), Полозова Юлия (Киров, ЭПЛ, 11 кл.), Тутынин Владимир (КФМЛ, 11 кл.), Кошечкин Сергей (КФМЛ, 11 кл.), Маринина Дарья (КФМЛ, 11 кл.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ХРОНИКА (ноябрь 2011 – октябрь 2012)

28 ноября – 5 декабря: В Казани состоялся XV Кубок памяти А.Н. Колмогорова. Участвовали 42 команды из более чем 20 городов России, Украины и Казахстана. Команда «Киров 10-11» заняла 6 место в первой старшей лиге, команда «Киров 10» — 1 место во второй старшей лиге, команда «Киров 8-9» — 7 место в высшей юниорской лиге.

18–24 февраля: XXIX Уральский (XX Кировский) турнир юных математиков. Участвовали 70 команд из 20 городов России. Команда «Киров-8» заняла 5 место в высшей лиге старшей группы, команда «Киров-7» — 7 место в первой лиге младшей группы, команда «Киров-6-1» — 6 место во второй лиге младшей группы, команда «Киров 6-7» — 8 место во второй лиге младшей группы, команда «Киров-5» — 8 место в высшей лиге группы «Старт», команда «Киров-6-2» — 1 место во второй лиге группы «Старт», команда «Киров-5-6» — 6 место во второй лиге группы «Старт».

12 (для 6-8 кл.) и 26 (для 9-11 кл.) февраля: Санкт-Петербургская городская математическая олимпиада. Участвовали 11 кировчан. *Александр Кузнецов* (КФМЛ, 6 кл.), *Иван Бураков* (г. Кирово-Чепецк, лицей, 8 кл.), *Данил Корякин*, *Виталий Малыгин* завоевали дипломы II степени, *Полина Новосёлова* (КФМЛ, 6 кл.), *Дмитрий Пахомов* (г. Омутнинск, 7 кл.), *Алексей Латышев*, *Егор Марьин*, *Артём Рычков* — дипломы III степени, *Вячеслав Бердников*, *Арсений Дружинин* (оба — КФМЛ, 6 кл.), *Владимир Зяблицев* — похвальные отзывы I степени, *Георгий Шалыгин* (КФМЛ, 6 кл.), *Сергей Васильчишин*, *Иван Кочкин* — похвальные отзывы II степени.

15 марта: 32410 учащихся 2-10 кл. из Кировской области участвуют в международном математическом конкурсе-игре "Кенгуру-2012".

26-29 марта состоялся заключительный этап IV олимпиады имени Леонарда Эйлера, проведённой для восьмиклассников России АНОО «Вятский центр дополнительного образования» и Московским Центром непрерывного математического образования. В нём приняли участие 199 учащихся 6-8 классов, распределённых по территориальному признаку по четырём финалам в Омске, Кирове, Москве и Санкт-Петербурге. В кировском финале участвовали 53 школьника. Кировчанин *Николай Будин* завоевал диплом III степени, *Глеб Нуждов* и *Сергей Васильчишин* — похвальные грамоты.

23-28 апреля: Всероссийская математическая олимпиада в Смоленске. Участвовали кировчане: *Иван Кочкин* (диплом призёра по 9 кл.), *Данил Корякин*, *Алексей Латышев* (дипломы призёров по 10 кл.), *Азат Шарафутдинов* (похвальная грамота по 9 кл.), *Алексей Латышев* (похвальная грамота по 10 кл.), *Антон Смердов*, *Борис Широких*, *Алина Софронова*.

июнь: *Иван Кочкин* и *Данил Корякин* участвуют в летних учебно-тренировочных сборах кандидатов в сборную России на Международную математическую олимпиаду.

2–27 июля: XXVIII Летняя математическая школа Кировской области. 422 учащихся, в т. ч. 314 иногородних из Австралии, Алматы, Ангарска, Апатитов Мурманской обл., Барнаула, Белгорода, Бирска (респ. Башкортостан), Великого Устюга, Вологды, с. Выльгорт (респ. Коми), Глазова, Дмитровграда, Домодедово, Екатеринбурга, Железнодорожного Московской обл., Заинска (респ. Татарстан), Заречного Пензенской обл., Ижевска, Иркутска, Казани, Калининграда, Качканара, Краснодар, Красноярска, Куйбышева Новосибирской обл., Кургана, Луганска, Магнитогорска, Миасса, Москвы, Набережных Челнов, Нижневартовска, Нижнекамска, Нижнего Новгорода, Нижнего Тагила, Новосибирска, Ногинска Московской обл., Омска, Оренбурга, Орска, Пензы, Перми, Протвино Московской обл., Прохладного (респ. Кабардино-Балкария), Ростова-на-Дону, Самары, Санкт-Петербурга, Саранска, Снежинска Челябинской обл., Сочи, Сыктывкара, Тамбова, Тобольска, Ульяновска, Уфы, Фрязино Московской обл., Харькова, Чебоксар, Челябинска, Череповца, Черноголовки Московской обл., Южно-Сахалинска, Якутска.

31 июля – 1 августа: *Иван Бураков*, *Иван Кочкин* и *Алексей Латышев* участвуют в финальном туре VIII олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина. *Иван Бураков* награждён похвальной грамотой.

1 – 9 августа: *Данил Корякин*, *Иван Кочкин*, *Виталий Малыгин*, *Алексей Латышев*, *Азат Шарафутдинов* участвуют в XXIV Международной конференции Турнира городов (Теберда). По итогам конференции все кировчане награждены дипломами.

23 сентября состоялась игра «Математическое домино», в которой приняли участие 555 пятиклассников и 484 шестиклассника из Кирова и области.

30 сентября состоялся Турнир им. Ломоносова (математика, физика, химия, биология), в котором участвовали 454 семиклассника и 406 восьмиклассников.

По итогам XXXIII Турнира городов, проходившего в 2011/12 учебном году, 28 школьников из Кировской области награждены дипломами победителей.

© И.С.Рубанов, 2012.