



XL РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

КИРОВСКАЯ ОБЛАСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА, 2013

**ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ,
МЕТОДИЧЕСКИЕ
РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Киров
2013**

*Оргкомитету и жюри муниципального этапа
математической олимпиады школьников*

Уважаемые коллеги!

В начале олимпиады напомните участникам, что нужно не только приводить ответы, но и *обосновывать* их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ — лишь его результат).

Продолжительность олимпиады составляет для 5-7 кл. — 2,5 часа, для 8 кл. — 3 часа, для 9 кл. — 3,5 часа, для 10-11 кл. — 4 часа, не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.

После олимпиады (лучше всего — в тот же день) просим провести разбор задач для ее участников.

Отзывы об этой брошюре и олимпиадных заданиях направляйте по адресу: 610005, г. Киров, 5, а/я 1026, ЦДООШ.

Автор благодарен А.В. Черанёвой, О.В. Старостиной, И.А. Семёновой, Е.М. Ковязиной, О.В. Рубановой, В.В. Сидорову за полезные обсуждения и критику.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. Решение каждой задачи, независимо от её трудности, оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7, дробные оценки не допускаются.

2. При оценке рассуждений в олимпиадных работах, как правило, сначала дается ответ на принципиальный вопрос: являются ли решением задачи (хотя, может быть, и с различными недостатками) или не являются (хотя, может быть, и содержат существенное продвижение в направлении решения). В первом случае оценка должна быть не ниже 4, во втором — не выше 3.

3. По проверке и оценке решений большинства задач мы даём конкретные указания. Они помещаются после наших решений и отмечены значком •. В случаях, не предусмотренных конкретными указаниями, оценка определяется по следующим общим правилам:

<i>Оценка</i>	<i>З а ч т о с т а в и т с я</i>
7	Верное решение
6	Верное решение с небольшими недочётами
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты
4	Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно
3	Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении
1-2	Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Решение, выполненное более чем наполовину, считается *существенно неполным*, если:

- ✓ содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- ✓ при верной общей схеме рассуждений явно или скрыто опирается на важные недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными;
- ✓ состоит в разборе нескольких возможных случаев, и хотя бы один случай, *существенно отличающийся от верно разобранных*, упущен или разобран неверно;
- ✓ состоит из двух частей (например, доказательства необходимости и достаточности либо доказательства оценки и построения примера), из которых верно выполнена только одна, причём более сложная.

При расхождении между общими и конкретными указаниями применяются конкретные.

4. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за «нерациональность» решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено конкретными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, пометки и т.п.***

5. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего — логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *не вычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочетам.

6. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике. Умение хорошо *догадываться* на олимпиаде должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение.

Если участник владеет нужным обоснованием, но не может связно изложить его, *роль обоснования могут в известной мере сыграть черновые записи и рисунки, раскрывающие ход мысли автора*. Поэтому при проверке надо ***просматривать все черновики***, причем недостатки, которых нет в чистовике, не учитываются, но учитывается все, что может улучшить чистовик. Еще эффективнее в этом отношении *проверка работы в присутствии ее автора*, вполне возможная, если участников немного.

7. Ответ, найденный логическим путем, как правило, оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 5 КЛАССА

Задача 1. Найдите четырёхзначное число, у которого вторая цифра вдвое больше первой, третья — втрое меньше второй, а четвёртая — вчетверо больше третьей.

Ответ. 3628.

♦ Других таких чисел нет. В самом деле, вторая цифра должна быть чётной и делиться на 3. Таких цифр две: 0 и 6, но если вторая цифра равна 0, то равны 0 и все остальные. Значит, вторая цифра равна 6, а по ней однозначно восстанавливаются и все остальные цифры.

• За верный ответ — 7 баллов. Обоснования его единственности не требуется, но на разборе решений о ней обязательно надо рассказать.

Задача 2. В 9.00 Юра вышел из дома и пошёл по прямой дороге со скоростью 6 км/ч. Через некоторое время он развернулся и с той же скоростью пошёл домой. В 12.00 Юре оставалось до дома два километра. На каком расстоянии от дома он развернулся? Объясните, как был найден ответ.

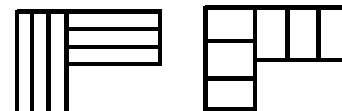
Ответ. На расстоянии 10 км. **Решение.** Пусть от точки разворота до Юриного дома x км. Тогда за 3 часа, с 9.00 до 12.00, он прошёл $x+(x-2) = 2x-2$ км. Так как он шёл три часа со скоростью 6 км/ч, $2x-2 = 6 \cdot 3 = 18$ км, откуда $x = 10$.

• Только ответ — 1 балл. Ответ с проверкой его правильности без объяснения, как он был найден, или найденный подбором — 3 балла.

Задача 3. «Уголок», изображённый на рисунке справа, легко разрезать на четыре одинаковых квадрата. А как разрезать его на 6 одинаковых частей?



Решение. Два способа разрезать «уголок» на 6 одинаковых прямоугольников показаны на рисунках.



• За любой верный пример — 7 баллов. Составителю неизвестны другие способы разрезания, кроме двух приведённых на рисунках. Это, конечно, не значит, что их нет, но любые способы, не совпадающие с указанными двумя, нужно тщательно проверять.

Задача 4. Встретились три пятиклассника — Миша, Коля и Толя. Каждый из них либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Миша сказал: «Все мы — лжецы». Коля сказал: «Среди нас ровно два лжеца». Толя промолчал. Кто из них лжец, а кто — нет? Объясните, как Вы рассуждали.

Ответ. Миша и Толя — лжецы, Коля — правдивый. **Решение.** Миша — лжец: если бы он говорил правду, то сам себя называл бы лжецом. Допустим, Коля — тоже лжец. Тогда и Толя — лжец, иначе лжецов в самом деле было бы ровно два. Но тогда все трое — лжецы, и Миша сказал правду, чего не может быть. Если же Коля говорит правду, то Толя — лжец, и всё сходится.

• За верный ответ — 1 балл. За объяснение, почему Миша лжец — до 2 баллов. За объяснение, почему Коля не лжец — до 4 баллов. Все указанные баллы суммируются.

Задача 5. Можно ли выложить в ряд 30 шариков — белых, синих и красных — так, чтобы среди любых двух идущих подряд шариков был хотя бы один белый, среди

любых трёх идущих подряд — хотя бы один синий, а среди любых пяти идущих подряд — хотя бы один красный? Ответ объясните.

Ответ. Нельзя. **Первое решение.** Допустим, можно. Возьмём красный шарик, не лежащий с краю (такой найдётся хотя бы в пятёрке шариков со 2-го по 6-ой). Соседние с ним шарик должны быть белыми, иначе найдутся два соседних шарика, среди которых нет белых. Но это значит, что мы нашли три подряд идущих шарика, среди которых нет синего. **Второе решение.** Разбив 30 шариков на 15 пар соседних шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 15 белых. Разбив их на 10 троек подряд идущих шариков, убеждаемся, что среди выложенных шариков не меньше 10 синих. Наконец, разбив их же на 6 пятёрок подряд идущих шариков, видим, что среди выложенных шариков не меньше 6 красных. Получается, что шариков должно быть не меньше, чем $15+10+6 = 31$, а их только 30.

♦ См. также задачу 5 6 класса и задачу 3 8 класса.

• За ответ без обоснования — 0 баллов. Без объяснения используется, что найдётся красный шарик, не лежащий с краю, — снимается 1 балл. Без обоснования (разбиением шариков на пары, тройки, пятёрки идущих подряд) утверждается, что белых шариков не меньше, чем $30:2 = 15$ и т.п. — не больше 3 баллов.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 6 КЛАССА

Задача 1. Такова же, как задача 2 для 5 класса.

• Только ответ — 1 балл. Ответ с проверкой его правильности без объяснения, как он был найден, или найденный подбором — 3 балла.

Задача 2. Такова же, как задача 3 для 5 класса.

• За любой верный пример — 7 баллов. Составителю неизвестны другие способы разрезания, кроме двух приведённых выше в решении. Это, конечно, не значит, что таких способов нет, но любые способы, не совпадающие с указанными двумя, нужно тщательно проверять.

Задача 3. В магазине продают металлические буквы (одинаковые буквы стоят одинаково, а разные, возможно, по-разному; цены не обязательно равны целому числу рублей). Слово ВОЛ обойдётся в 15 рублей, ОЛОВО — в 23 рубля, СТОК — в 20 рублей. Сколько стоит слово ОТКОС? Ответ объясните.

Ответ. 24 рубля. **Решение.** Слово ОЛОВО дороже слова ВОЛ на цену двух букв О. Поэтому буква О стоит $(23-15):2 = 4$ рубля. Слово ОТКОС дороже слова СТОК на цену одной буквы О. Стало быть, оно стоит $20+4 = 24$ рубля.

• За ответ без обоснования — 0 баллов. «Решение примером» — 0 баллов.

Задача 4. В Простоквашинской сельской библиотеке в 34,56 раза больше книг, чем на книжной полке у Дяди Фёдора. Докажите, что в этой библиотеке больше 800 книг.

Решение. Пусть у Дяди Фёдора на полке n книг. Тогда в библиотеке $34,56n = 3456n/100 = 864n/25$ книг. Поскольку числа 864 и 25 взаимно просты, а число $864n/25$ должно быть целым, число n должно делиться на 25. Следовательно, частное $n/25$ не меньше 1, то есть в библиотеке не меньше 864 книг, а это больше 800.

• «Решение примером» — 0 баллов. Если тот факт, что число книг Дяди Фёдора делится на 25, используется без обоснования — снимаются 2 балла.

Задача 5. Можно ли выложить в ряд 20 шариков — белых, синих и красных — так, чтобы среди любых двух идущих подряд шариков был хотя бы один белый, среди любых трёх идущих подряд — хотя бы один синий, а среди любых девяти идущих подряд — хотя бы один красный?

Ответ. Нельзя. **Решение.** См. первое решение задачи 5 для 5 класса.

• За ответ без обоснования — 0 баллов. Без объяснения используется, что найдётся красный шарик, не лежащий с краю, — снимается 1 балл.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

Задача 1. У Федота был капитал. Когда мама дала Федоту 49 рублей, его капитал вырос в 99 раз. Сколь велик был этот капитал вначале?

Ответ. Вначале капитал Федота составлял 50 копеек. **Решение.** Пусть вначале у Федота было x рублей. Из условия задачи получаем, что $x+49 = 99x$. Решая это уравнение, получаем $x = 0,5$ рубля = 50 копеек.

• Только ответ — 1 балл. Ответ с проверкой его правильности без объяснения, как он был найден, или найденный подбором — 3 балла.

Задача 2. Как провести через одну точку четыре прямые, чтобы среди углов между ними нашлись углы величиной 10° , 20° , 30° , 40° , 50° и 60° ? На чертеже укажите величины углов.

Решение. Первую прямую проведём произвольно, вторую — под углом 10° к первой, третью — под углом 30° ко второй, четвёртую — под углом 20° к третьей (все углы откладываются в одном и том же направлении). Угол в 40° будет между первой и третьей прямыми, угол в 50° — между второй и четвёртой прямыми, угол в 60° — между первой и четвёртой прямыми.

• За верный пример — 7 баллов.

Задача 3. Коля, Вася и Петя пошли за покупками. Всего у них с собой 2200 рублей, и ни у кого нет монет мельче рубля. У Коли с собой в 18 раз меньше денег, чем у Васи. Докажите, что Петя сможет купить мороженое за 15 рублей.

Решение. Пусть у Коли n рублей. Тогда у Васи $18n$ рублей, а у Коли с Васей вместе — $19n$ рублей. Так как ни у кого нет монет мельче рубля, n — целое число. Поделив с остатком 2200 на 19, получим $2200 = 115 \cdot 19 + 15$. Таким образом, у Коли с Васей вместе не больше $115 \cdot 19 = 2185$ рублей, поэтому у Пети — не меньше 15 рублей.

• «Решение примером» — 0 баллов.

Задача 4. 20 человек выстроены в пять шеренг по четыре человека в каждой. Каждый из них либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт, и всем им известно, кто из них рыцарь, а кто — лжец. Журналист спросил у каждого из них: «Верно ли, что в каждой шеренге стоит хотя бы один лжец?». Могло ли случиться, что трое ответили «нет», а остальные — «да»?

Ответ. Не могло. **Решение.** Допустим, в каждой шеренге действительно стоит хотя бы один лжец. Тогда лжецов хотя бы пятеро, и все они ответят «нет». Если же

лжец есть не в каждой шеренге, то есть шеренга из четырёх рыцарей, и все эти четверо ответят «нет». Таким образом, в любом случае ответят «нет» хотя бы четверо.

• Ответ «не могло» без обоснования — 0 баллов. «Решение примером» — 0 баллов.

Задача 5. Миша и Маша ехали на поезде в Киров. Миша лежал на полке, а Маша смотрела в окно. «Далеко ли до Кирова?» — спросил Миша у Маши в 12.00. «73 километра», — ответила Маша. На тот же вопрос, заданный в 12.15 и 12.45, Маша ответила: «62 километра» и «37 километров». Известно, что Маша, если расстояние составляло не целое число километров, каждый раз округляла его до ближайшего целого числа (а если таких было два — то до любого из них по своему выбору). Найдите скорость поезда, если известно, что она была постоянной. Укажите все возможности и доказите, что других нет.

Ответ. 48 км/ч. **Решение.** Поскольку Маша каждый раз округляла расстояние до ближайшего целого числа, в 12.00 до Кирова было не меньше, чем 72,5 и не больше, чем 73,5 км, в 12.15 — не меньше, чем 61,5 и не больше, чем 62,5 км, а в 12.45 — не меньше, чем 36,5 и не больше, чем 37,5 км. Поэтому за 15 минут с 12.00 до 12.15 поезд проехал не меньше 10 и не больше 12 км, а за 30 минут с 12.15 до 12.45 — не меньше 24 и не больше 26 км. Так как 15 минут — это четверть часа, а 30 минут — половина часа, первое означает, что скорость поезда — не меньше $10 \times 4 = 40$ км/ч и не больше $12 \times 4 = 48$ км/ч, а второе — что она не меньше $24 \times 2 = 48$ км/ч и не больше, чем $26 \times 2 = 52$ км/ч. Единственная скорость, удовлетворяющая обоим этим условиям, составляет 48 км/ч.

• Только ответ — 0 баллов. Ответ с проверкой его правильности без обоснования того, что других ответов нет — 2 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. Трёхзначное число в 56 раз больше своей последней цифры. Во сколько раз оно больше своей первой цифры?

Ответ. В 112 раз. **Решение.** Произведение последней цифры числа на 6 должно оканчиваться на саму эту цифру. Таким свойством обладают все чётные цифры, и только они. Из них 0 нам, очевидно, не подходит, а, умножая на 56 цифры 2, 4, 6 и 8, получаем, соответственно, числа 112, 224, 336 и 448, каждое из которых больше своей первой цифры в 112 раз.

• Только ответ — 0 баллов. Ответ проверен не для всех искомых чисел — не выше 2 баллов. Ответ верен, проверен для всех искомых чисел, но из решения не следует, что других искомых чисел нет — 4 балла.

Задача 2. В магазине продают металлические буквы (одинаковые буквы стоят одинаково, а разные, возможно, по-разному; цены не обязательно равны целому числу рублей). Слово КОТ обойдётся в 15 рублей, РОТ — в 17 рублей, АУ — в 12 рублей, РУКА — в 21 рубль. Сколько стоит слово УРА?

Ответ. 17,5 рублей. **Решение.** Будем обозначать цену букв самими этими буквами. Сравнивая цену слов КОТ и РОТ, видим, что $P - K = 2$. Вычитая из цены слова РУКА цену слова АУ, находим, что $P + K = 9$. Складывая получившиеся уравнения и деля на 2, находим, что $P = 5,5$. Осталось заметить, что цена слова УРА равна сумме цен слова АУ и буквы Р.

• Только ответ — 0 баллов. «Решение примером» — 0 баллов. Найдено одно из двух равенств $P-K=2$, $P+K=9$, дальнейшего продвижения нет — 2 балла. Найдены оба равенства, дальнейшего продвижения нет — 3 балла. Показано, что $P=5,5$, дальнейшего продвижения нет — 4 балла.

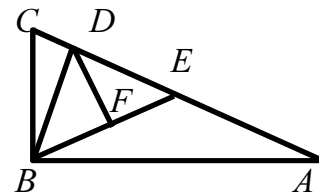
Задача 3. Существует ли такое пятизначное число, что среди любых трёх его идущих подряд цифр есть хотя бы две единицы, а среди любых четырёх идущих подряд — хотя бы две двойки? Если да — приведите пример. Если нет — объясните, почему.

Ответ. Нет. **Решение.** Допустим, такое число существует. Тогда среди первых трёх его цифр — хотя бы две единицы, и потому там не больше одной двойки. Значит, его четвёртая цифра должна быть двойкой — иначе среди четырёх первых цифр не будет двух двоек. Повторяя проведённое рассуждение для трёх и четырёх последних цифр нашего числа, получаем, что и вторая его цифра должна быть двойкой. Но тогда среди трёх средних его цифр не найдётся двух единиц.

• За ответ без обоснования — 0 баллов. Доказано только, что четвёртая (или только, что вторая) цифра — двойка, дальнейшего продвижения нет — 3 балла.

Задача 4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E , что $AD=AB$ и $CE=CB$. Из точки D опущен перпендикуляр DF на прямую BE . Докажите, что $DF=BF$.

Решение. Положим $\angle CAB = \alpha$. Поскольку $AD=AB$ и $CE=CB$, имеем $\angle DBA = \angle BDA = (180^\circ - \alpha)/2$ и $\angle EBC = \angle BEC = (180^\circ - (90^\circ - \alpha))/2 = (90^\circ + \alpha)/2$. Поэтому $\angle DBE = \angle DBA + \angle EBC - \angle ABC = (180^\circ - \alpha)/2 + (90^\circ + \alpha)/2 - 90^\circ = 45^\circ$. Следовательно, прямоугольный треугольник BFD — равнобедренный, что и требовалось доказать.



Задача 5. Двое играют в игру. Вначале у них есть квадратный лист бумаги со стороной 4. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника впервые появляется сторона длиной не больше 1. Кто победит при правильной игре обоих игроков: тот, кто ходит первым или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?

Ответ. Тот, кто ходит вторым. **Решение.** Лемма. Если площадь S прямоугольника не меньше 3, и обе его стороны длиннее 1, то, отрезав от него единичный прямоугольник параллельно меньшей стороне, мы получим прямоугольник, у которого обе стороны также длиннее 1. Доказательство. У прямоугольника, площадь которого не меньше 3, длина наибольшей стороны больше 1,5 — иначе его площадь меньше $1,5^2 = 2,25$. Если мы ототрежем от него прямоугольник площади 1 параллельно меньшей стороне, большая сторона уменьшится на свою $1/S$ -ую часть, то есть не больше, чем на треть своей длины. Значит, её длина останется больше 1. Длина стороны, параллельно которой был проведён разрез, не изменится. Лемма доказана.

Из леммы следует, что играющие смогут делать ходы, пока площадь оставшейся части не окажется равной 2. Это случится после 14 ходов, и очередь ходить будет за первым. После его хода останется прямоугольник площади 1. Одна из сторон такого прямоугольника не длиннее 1 — иначе его площадь была бы больше 1. Значит, первый проигрывает.

♦ Эта задача, как и задача 5 9 класса — частный случай общей задачи, данной под номером 5 10 классу. Более сложная версия игры дана под номером 5 11 классу.

• За ответ без обоснования — 0 баллов. За верный алгоритм игры победителя (например, «второй должен каждый раз проводить свой разрез параллельно меньшей стороне прямоугольника») без обоснования его правильности — 2 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. Найдите произведение

$$(\sin 0^\circ - \cos 0^\circ)(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ) \dots (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)(\sin 90^\circ - \cos 90^\circ).$$

Ответ. 0. Решение. Среди сомножителей есть разность $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ$, равная 0.

• За ответ без обоснования — 0 баллов.

Задача 2. На координатной плоскости даны точки $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(4,2)$. Докажите, что прямая $y = x$ делит угол BAC на два равных угла

Первое решение. Опустим из точки B перпендикуляр BD на ось ординат, а из точки C — перпендикуляр CE на ось абсцисс. Поскольку $CE = 2 = 2BD$, а $EA = 4 = 2DA$, прямоугольные треугольники BDA и CEA подобны. В частности, равны углы BAD и CAE . Следовательно, равны и дополняющие их до 45° градусов углы BAX и CAX , где X — любая точка на биссектрисе первого координатного угла. **Второе решение.** Возьмем точку $X(1, 1)$ на биссектрисе первого координатного угла. Тогда

$$\cos \angle BAX = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AX}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AX}|} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1) / (\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}) = 3 / \sqrt{10},$$

$$\cos \angle CAX = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AX}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AX}|} = (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1) / (\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}) = 3 / \sqrt{10},$$

откуда $\angle BAX = \angle CAX$, так как оба эти угла — острые.

• Ссылка на чертёж без обоснования — 0 баллов.

Задача 3. Даны три различных натуральных числа k , m и n . Докажите, что числа 2^k , 2^m , 2^n можно вписать вместо многоточий в равенство $\dots x^2 + \dots x + \dots = 0$ таким образом, чтобы у получившегося квадратного уравнения были два различных корня.

Решение. Пусть k — наибольшее из данных чисел. Тогда подойдёт, например, уравнение $2^m x^2 + 2^k x + 2^n = 0$. Его дискриминант D равен $2^{2k} - 4 \cdot 2^m \cdot 2^n = 2^{2k} - 2^{m+n+2}$. Поскольку все три данных числа различны, одно из чисел m , n меньше, чем k , по крайней мере на 1, а другое — по крайней мере на 2. Поэтому $m+n+2 \leq (k-1)+(k-2)+2 = 2k-1 < 2k$, откуда $D = 2^{2k} - 2^{m+n+2} > 0$.

• За верный пример — 3 балла, обоснование примера — из 4 баллов. Баллы, начисленные за пример и обоснование, складываются.

Задача 4. Можно ли покрасить каждую точку плоскости в красный или синий цвет таким образом, чтобы на каждой окружности радиуса 1, находящейся в этой плоскости, лежало ровно сто синих точек?

Ответ. Можно. Решение. Проведём на плоскости синюю прямую и покрасим в синий цвет все параллельные ей прямые, отстоящие от неё на расстояния, кратные $1/50$. Остальные точки плоскости покрасим в красный цвет. Если окружность радиуса 1

не касается синих прямых, то она пересекает ровно 50 из них, а если касается, то ровно двух и пересекает 49. В обоих случаях на окружности будет ровно 100 синих точек.

• За ответ «можно» без обоснования — 0 баллов. За верный пример без обоснования — 6 баллов.

Задача 5. Двое играют в игру. Вначале у них есть квадратный лист бумаги со стороной 2013. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника впервые появляется сторона длиной не больше 1. Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?

Ответ. Тот, кто ходит первым. **Решение.** По лемме из решения задачи 5 8 класса играющие заведомо смогут делать не ведущие к немедленному проигрышу ходы (например, параллельно меньшей стороне оставшегося прямоугольника), пока площадь оставшейся части не окажется равной 2. Это случится после $2013^2 - 2$ ходов. Так как это число нечётно, очередь ходить будет за вторым. После его хода останется прямоугольник площади 1. Одна из сторон такого прямоугольника не длиннее 1 — иначе его площадь была бы больше 1. Значит, второй проигрывает.

• За ответ без обоснования — 0 баллов. За верный алгоритм игры победителя (например, «первый должен каждый раз проводить свой разрез параллельно меньшей стороне прямоугольника») без обоснования его правильности — 2 балла.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. Найдите произведение $(\operatorname{tg}^2 1^\circ - 3)(\operatorname{tg}^2 2^\circ - 3) \dots (\operatorname{tg}^2 88^\circ - 3)(\operatorname{tg}^2 89^\circ - 3)$.

Ответ. 0. **Решение.** Среди сомножителей есть разность $\operatorname{tg}^2 60^\circ - 3$, равная 0.

• За ответ без обоснования — 0 баллов.

Задача 2. Такова же, как задача 3 для 9 класса.

• За верный пример — 3 балла, обоснование примера — из 4 баллов. Баллы, начисленные за пример и обоснование, складываются.

Задача 3. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Известно, что вписанные в треугольники ABM , BCM и CAM окружности равны и попарно касаются друг друга. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и ACM соответственно, а K — точка касания этих окружностей. Поскольку окружности лежат с разных сторон от медианы AM , обе они касаются этой медианы в точке K , откуда $O_1O_2 \perp AM$. Поскольку окружности равны, $O_1K = O_2K$. Таким образом, отрезок AM является в треугольнике O_1AO_2 медианой и высотой, а, значит, и биссектрисой. С другой стороны, AO_1 и AO_2 — биссектрисы углов BAM и CAM соответственно. Поэтому равные между собой углы O_1AM и O_2AM — это половины углов BAM и CAM , которые тем самым тоже равны. Итак, медиана AM является в треугольнике ABC также и биссектрисой. Аналогично, биссектрисами являются и две другие медианы треугольника ABC , из чего следует, что он — равносторонний.

Задача 4. На каждой грани куба поставлено натуральное число. В каждой вершине этого куба поставлено произведение чисел на примыкающих к этой вершине

гранях. Сумма всех чисел в вершинах оказалась равна 2013. Чему может быть равна сумма всех чисел на гранях (укажите все возможности)?

Ответ. 75. Решение. Пусть на трех парах противоположных граней написаны числа $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ соответственно. Легко показать, что сумма всех чисел в вершинах равна $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$. При этом все суммы в скобках больше 1. Есть только один способ разложить число 2013 на три натуральных множителя, больших 1: $3 \cdot 11 \cdot 61$, — так как числа 3, 11 и 61 — простые. Поэтому сумма всех чисел на гранях равна $3+11+61 = 75$.

• За ответ без всякого обоснования — 0 баллов. Ответ, полученный рассмотрением конкретного примера подходящей расстановки чисел, при отсутствии доказательства единственности ответа — 3 балла.

Задача 5. Двое играют в игру. Вначале у них есть прямоугольный лист бумаги размером $m \times n$, где m и n — натуральные числа, большие 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника есть сторона длины строго меньше 1 или остался квадрат 1×1 . Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?

Ответ. Если площадь исходного прямоугольника нечётна, выигрывает первый, если чётна — второй. **Решение. Лемма.** Если площадь S прямоугольника не меньше 3, и обе его стороны не короче 1, то, отрезав от него единичный прямоугольник параллельно меньшей стороне, мы получим прямоугольник, у которого обе стороны также не короче 1. **Доказательство.** Аналогично доказательству леммы из решения задачи 5 8 класса.

Итак, играющие могут делать не ведущие к немедленному проигрышу ходы (например, параллельно меньшей стороне оставшегося прямоугольника), пока площадь оставшейся части не окажется равной 2. Это случится после $mn-2$ ходов. Если это число чётно, очередь хода будет за первым, если нечётно — за вторым, и тот, кто делает этот ход, проигрывает. В самом деле, после этого хода останется прямоугольник площади 1. Если обе его стороны равны 1, то это квадрат 1×1 , а в остальных случаях меньшая его сторона короче 1.

• Только верный ответ — 1 балл. Верный ответ плюс верный алгоритм игры победителя (например: «каждый раз проводить разрез параллельно меньшей стороне прямоугольника») без обоснования его правильности — 2 балла. Разбор случая нетривиального (не слишком малой площади) конкретного исходного прямоугольника при отсутствии общего решения — до 3 баллов.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. Какое наибольшее количество различных не равных 0 цифр можно выписать в ряд так, чтобы из любых двух стоящих рядом цифр одна делилась на другую?

Ответ. 8. Решение. Заметим, что цифры 5 и 7 могут стоять только рядом с единицей. Поэтому обе эти цифры можно выписать лишь в комбинациях 715 и 517, содержащих по три цифры. Значит, всего в искомом ряду может быть не больше восьми цифр. А восемь цифр выписать в ряд можно, например, так: 51936248.

• Только ответ «8» — 0 баллов. Только пример ряда из 8 цифр — 3 балла. Только доказательство, что больше 8 цифр выписать нельзя — 3 балла.

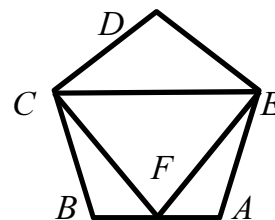
Задача 2. Найдутся ли такие три вещественных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Ответ. Нет. **Решение.** Пусть у трёхчлена ax^2+bx+c два отрицательных корня x_1 и x_2 . Тогда $b/a = -(x_1+x_2) > 0$ и $c/a = x_1x_2 > 0$, то есть числа b и c того же знака, что и число a . Допустим, как-то переставив коэффициенты, мы получили уравнение с двумя положительными корнями. Но тогда частное от деления коэффициента при x на коэффициент при x^2 должно было бы стать отрицательным, а частное от деления двух чисел одного знака положительно. Противоречие.

• Ответ «нет» без обоснования — 0 баллов.

Задача 3. Может ли развёртка треугольной пирамиды быть пятиугольником?

Ответ. Может. **Решение.** Возьмём правильный пятиугольник $ABCDE$. Пусть F — середина стороны AB . Тогда существует треугольная пирамида с основанием CEF и боковыми гранями, равными треугольникам AFE , BFC и CDE . В самом деле, повернём треугольники AFE и BFC вокруг осей FE и FC соответственно так, чтобы в некоторой точке G совместились их вершины A и B (это возможно, так как и оси FE и FC , и отрезки FA и FB симметричны относительно плоскости, проходящей через точку F перпендикулярно AB) Треугольник CGE при этом окажется равным треугольнику CDE по трём сторонам.



• Ответ «может» без обоснования — 0 баллов. Любая верная выкройка развёртки — 5 баллов. Оставшиеся 2 балла начисляются за пояснение, как из выкройки клеится пирамида. При проверке имейте в виду, что наш пример выкройки — не единственный возможный!

Задача 4. Существует ли такой выпуклый пятиугольник, что для любой его вершины две проведённые из неё диагонали делят его на три треугольника равной площади?

Ответ. Нет. **Решение.** Допустим, $ABCDE$ — искомый пятиугольник. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. По условию каждая из двух его диагоналей делит его на два треугольника равной площади. Из этого, как известно (и нетрудно доказать) следует, что $ABCD$ — параллелограмм. В частности, $AB \parallel CD$. Рассматривая четырёхугольник $ACDE$, аналогичными рассуждениями доказываем, что $CD \parallel AE$. Но тогда получается, что $AB \parallel CD \parallel AE$, что, очевидно, невозможно.

Задача 5. Двое играют в игру. Вначале у них есть прямоугольный лист бумаги размером $m \times n$, где m и n — натуральные числа, большие 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок разрезает имеющийся прямоугольник на два, один из которых имеет площадь 1, и выбрасывает прямоугольник единичной площади. Проигрывает тот, после хода которого у оставшегося прямоугольника есть сторона длины строго меньше 1. Если же остался квадрат 1×1 , проигрывает тот, кто должен делать ход. Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр, — и как ему для этого надо играть?

Ответ. Если площадь исходного прямоугольника нечётна, выигрывает первый, если чётна — второй. **Решение.** По лемме из решения задачи 5 10 класса играющие

могут делать не ведущие к немедленному проигрышу ходы, пока площадь оставшейся части не окажется равной 2. Это случится после $m-2$ ходов. Если это число чётно, очередь хода будет за первым, если нечётно — за вторым. Этим ходом игрок должен разрезать оставшийся прямоугольник по одной из его средних линий. Если обе стороны этого прямоугольника короче 2, то тот, кто делает этот ход, проигрывает, что соответствует данному выше ответу. В противном случае остался прямоугольник 2×1 , и тот, кто делает ход, выигрывает, оставляя сопернику квадрат 1×1 . Чтобы завершить решение, достаточно показать, что тот, кто, согласно нашему ответу, должен победить (назовём его П), может не допустить появления в ходе игры прямоугольника со стороной 1.

Допустим, в игре случился *роковой ход*, после которого впервые появился прямоугольник со стороной 1. Заметим, что площадь этого прямоугольника не меньше 2. Значит, перед роковым ходом площадь оставшегося прямоугольника была не меньше 3. По лемме из решения задачи 5 8 класса можно считать, что до этого хода П все свои разрезы совершал вдоль короткой стороны доставшегося ему прямоугольника, укорачивая его длинную сторону. Тогда его ход не мог оказаться роковым: ведь длина большей стороны оставшегося прямоугольника, которую П укоротил, была не меньше, чем $\sqrt{3} > 1,7$, а укоротил он её не больше, чем на треть.

Значит, роковой ход сделал противник игрока П. Рассмотрим прямоугольник $a \times b$ ($a \geq b$), доставшийся П перед его ходом, предшествовавшим роковому. Поскольку П достаются прямоугольники нечётной площади, а после рокового хода его противника остался прямоугольник площади не меньше 3, имеем $S = ab \geq 5$. Стало быть, своим ходом П укоротил сторону a не более, чем на $1/5$ её длины. Поскольку $S \geq 5 \Rightarrow a \geq \sqrt{5}$, получившаяся из a сторона c не меньше, чем $4\sqrt{5}/5 > 1,7$, и если отрезать от неё часть длины $c/(S-1) \leq c/4$, её длина останется больше 1. Следовательно, роковой ход укоротил на $1/(S-1)$ часть сторону b , откуда $b(S-2)/(S-1) = 1$ и $b = (S-1)/(S-2)$. Но тогда П может своим предыдущим ходом вместо стороны a укоротить сторону b . После этого получится сторона длины $b(S-1)/S = (S-1)^2/S(S-2)$, которую дальше укорачивать уже нельзя, потому что отнимать придётся хотя бы $1/(S-1)$ её часть, и получится сторона длины не более $[(S-2)/(S-1)] \cdot [(S-1)^2/S(S-2)] = (S-1)/S < 1$. Значит, следующими ходами соперники смогут укорачивать только длинную сторону оставшегося прямоугольника, и рокового хода не случится, так как длина другой стороны, равная $(S-1)^2/S(S-2)$, меньше 2.

- Только верный ответ — 1 балл. Разбор случая нетривиального (не слишком малой площади) конкретного исходного прямоугольника при отсутствии общего решения — до 3 баллов. Упущен случай, когда перед последним ходом появился прямоугольник 2×1 — не более 3 баллов.

ИСТОЧНИКИ И АВТОРЫ ЗАДАЧ

Личная олимпиада XXIII Уральского турнира юных математиков (автор — И. Рубанов): 7-5.

Средиземноморская математическая олимпиада, 2006 г.: 9-4.

Личная олимпиада I Кубка памяти А. Н. Колмогорова: 10-3.

Short-list олимпиады Baltic Way, 2004 (с заменой числа): 10-4.

Удмуртия, муниципальный этап олимпиады 2008/09 учебного года: 11-2.

Остальные задачи составлены И. Рубановым (некоторые — по мотивам математического фольклора) специально для этой олимпиады.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Информация о победителях и призерах областной олимпиады 2012/13 г.

ПОБЕДИТЕЛИ (ДИПЛОМ I СТЕПЕНИ): Новосёлова Полина (КФМЛ, 7 кл.), Зяблицев Владимир (лицей 21, 8 кл.), Нуждов Глеб (КФМЛ, 9 кл.), Кочкин Иван (КФМЛ, 10 кл.), Корякин Данил (КФМЛ, 11 кл.). Иван Кочкин награждён также дипломом жюри за лучший результат по 11 классу.

ПРИЗЁРЫ (ДИПЛОМ II СТЕПЕНИ): Кузнецов Александр (КФМЛ, 7 кл.), Рубцов Антон (КЛЕН, 7 кл.), Артемьев Александр (КФМЛ, 8 кл.), Пахомов Дмитрий (СОШ с УИОП г. Омутнинска, 8 кл.), Бураков Иван (лицей г. Кирово-Чепецка, 9 кл.), Васильчишин Сергей (КФМЛ, 9 кл.), Смердов Антон, Шарафутдинов Азат (оба — КФМЛ, 10 кл.), Латышев Алексей, Малыгин Виталий, Марьин Егор (все — КФМЛ, 11 кл.).

ПРИЗЁРЫ (ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ): Шалыгин Георгий, Савинова Екатерина (оба — КФМЛ, 7 кл.), Назарова Дарья (КФМЛ, 8 кл.), Анисимова Виктория (гимназия №1 г. Кирово-Чепецка, 8 кл.), Прозорова Анна, Кайсин Илья, Шишкин Михаил, Рубанов Илья (все — КФМЛ, 9 кл.), Парфин Кирилл, Рычков Артём, Марков Илья (все — КФМЛ, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНАЯ ГРАМОТА: Бердников Вячеслав, Мариев Артём (оба — КФМЛ, 7 кл.), Малых Артём (СОШ с УИОП №66 г. Кирова, 7 кл.), Плотников Андрей (СОШ №14 г. Кирова, 7 кл.), Халявин Илья (КЭПЛ, 10 кл.), Татарских Савелий (КЛЕН, 10 кл.), Ситчихин Сергей (СОШ с УИОП №2 г. Вятские Поляны, 10 кл.), Колупаев Владислав (КФМЛ, 11 кл.), Князева Ксения (лицей г. Кирово-Чепецка, 11 кл.), Казанцев Александр, Тюльпанова Екатерина, Зерцалова Дарья (все — КФМЛ, 11 кл.), Нелюбин Владимир (СОШ п. Октябрьский Фаленского района, 11 кл.), Казакова Татьяна (КФМЛ, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНЫЙ ОТЗЫВ I СТЕПЕНИ: Исупов Кирилл (КФМЛ, 8 кл.), Rogozina Анна, Будин Николай (оба — КФМЛ, 9 кл.).

ПОХВАЛЬНЫЙ ОТЗЫВ II СТЕПЕНИ: Арасланов Роман (КЛЕН, 8 кл.), Стародумова Полина (лицей г. Кирово-Чепецка, 8 кл.), Князева Анастасия (СОШ №5 г. Кирово-Чепецка, 9 кл.), Михеев Михаил, Пахматов Дмитрий (оба — КФМЛ, 9 кл.), Елохина Дарья (СОШ с УИОП г. Яранска, 9 кл.), Чернышев Алексей (КФМЛ, 9 кл.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ХРОНИКА (ноябрь 2012 – октябрь 2013)

2-9 ноября: В Казани состоялся XVI Кубок памяти А.Н. Колмогорова. Участвовали 34 команды, представлявшие 29 городов России и Украины. Команда «Киров 10-11» заняла 3 место в первой лиге старшей группы, команда «Киров-9» — 5 место в высшей лиге младшей группы.

30 ноября – 6 декабря: В Ижевске прошёл XL Уральский турнир юных математиков. Участвовали 58 команд, представлявшие 17 городов России и Украины. Команда «Киров-8» заняла 7 место в высшей лиге старшей группы, команда «Киров-7» — 4 место в первой лиге младшей группы, команда «Киров-6» — 4 место в высшей лиге младшей группы,

1 – 3 февраля: В Казани состоялся турнир математических игр имени П.А. Широкова. Команда пятиклассников г.Кирова завоевала диплом II степени.

16–22 февраля: XLI Уральский (XXI Кировский) турнир юных математиков. Участвовали 68 команд, представлявшие 26 городов России. Команда «Киров-8» заняла 6 место в высшей лиге старшей группы, команда «Киров-7» — 2 место в первой лиге младшей группы, команда «Киров-6» — 3 место в высшей лиге группы «Старт», команда «Киров-5» — 4 место во второй лиге группы «Старт».

10 (для 6-8 кл.) и 24 (для 9-11 кл.) февраля: Санкт-Петербургская городская математическая олимпиада. 10 февраля эта олимпиада для кировчан проводилась под руководством члена её жюри Сергея Берлова непосредственно в Кирове, ученики 9-11 классов 24 февраля соревновались в Санкт-Петербурге. 20 кировчан награждены дипломами и похвальными отзывами: Иван Кочкин и Егор Марьин — дипломами II степени, Анатолий Ашихмин, Сергей Лучинин (оба — КФМЛ, 6 кл.), Сергей Васильчишин, Глеб Нуждов, Данил Корякин, Алексей Латышев, Артём Рычков — дипломами III степени, Мария Семёнова (КФМЛ, 5 кл.), Анатолий Евтухов, Никита Коробов, Дарья Ширяева, Григорий Щенников (все — КФМЛ, 6 кл.) Дмитрий Клёнов (СОШ 28, 6 кл.), Ярослав Томинин (КФМЛ, 7 кл.), Кирилл Исупов, Иван Бу-

раков — похвальными отзывами I степени, *Александр Колпацников* (КФМЛ, 5 кл.), *Полина Новосёлова* похвальными отзывами II степени.

21 марта: 32036 учащихся из Кировской области участвуют в международном математическом конкурсе-игре "Кенгуру-2013".

25-28 марта состоялся заключительный этап V олимпиады имени Леонарда Эйлера, проведённой для восьмиклассников России АНОО «Вятский центр дополнительного образования» и Московским Центром непрерывного математического образования. В нём приняли участие 239 учащихся 6-8 классов, распределённых по территориальному признаку по четырём финалам в Новосибирске, Кирове, Москве и Санкт-Петербурге. В кировском финале участвовали 63 школьника. Кировчане *Виктория Анисимова*, *Александр Артемьев*, *Владимир Зяблицев* завоевали дипломы III степени, *Кирилл Исупов* — похвальную грамоту.

12 – 14 апреля: В Казани состоялся турнир математических игр имени Н.Г. Чеботарева. Команда пятиклассников г. Кирова завоевала диплом I степени.

14 апреля: XI устная олимпиада по геометрии (г. Москва). Участвовало 15 кировчан. *Иван Кочкин* и *Азат Шарафутдинов* завоевали дипломы II степени. *Илья Кайсин* и *Глеб Нуждов* — дипломы III степени. *Владимир Зяблицев*, *Дмитрий Пахомов*, *Данил Корякин*, *Алексей Латышев*, *Егор Марьин*, *Екатерина Тюльпанова* — похвальные отзывы.

23-29 апреля: Всероссийская математическая олимпиада в Сарове. Участвовали кировчане: *Сергей Васильчишин* (диплом призёра по 9 кл.) *Данил Корякин* (диплом призёра по 11 кл.), *Иван Кочкин* (похвальная грамота по 10 кл.), *Иван Бураков*, *Глеб Нуждов*, *Алексей Латышев*, *Виталий Малыгин*.

3–28 июля: XXIX Летняя математическая школа Кировской области. 435 учащихся, в т. ч. 327 иногородних из Апатитов, Архангельска, Барнаула, Белгорода, Березников, Бугульмы, Великого Устюга, Владивостока, Вологды, Воронежа, станицы Гиагинской респ. Адыгея, Глазова, Домодедово, Донецка, Екатеринбурга, Заинска, Ижевска, Йошкар-Олы, Иркутска, Казани, Качканара, Красноярска, Куйбышева Новосибирской обл., Кургана, Лабытнанги, Магнитогорска, Майкопа, Москвы, Набережных Челнов, Нижнего Новгорода, Нижнего Тагила, Новосибирска, Новоуральска, Ногинска, Омска, Оренбурга, Орска, Павлодара, Пензы, Перми, с. Пылково Пензенской области, Сальска, Самары, Санкт-Петербурга, Саратова, Смоленска, Соснового Бора, Сочи, Сум, Сыктывкара, Тобольска, Тольятти, Троя (Франция), Тулы, Ульяновска, Уфы, Фрязино Московской обл., Харькова, Чебоксар, Челябинска, Череповца, Черноголовки Московской обл., Чехова, Южноуральска, Якутска.

31 июля – 3 августа: *Иван Кочкин* участвует в финальном туре X олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина и завоёвывает диплом II степени.

4 – 12 августа: *Иван Кочкин* участвует в XXV Международной конференции Турнира городов (д. Боровка, Витебская обл., Беларусь). По итогам конференции награждён дипломом.

22 сентября состоялась игра «Математическое домино», в которой приняли участие 678 пятиклассников и 527 шестиклассников из Кирова и области.

27 – 29 сентября: В Казани состоялся турнир математических игр имени А.П. Нордена. Четыре команды кировчан участвовали в этом турнире он-лайн: команды Киров-5-1 и Киров-5-2 завоевали дипломы II степени, Киров-6-1 – диплом I степени, Киров-6-2 – диплом III степени.

29 сентября состоялся Турнир им. Ломоносова (математика, физика, химия, биология), в котором участвовали 455 семиклассников и 491 восьмиклассник.

По итогам **XXXIV Турнира городов**, проходившего в 2012/13 учебном году, 28 школьников из Кировской области награждены дипломами победителей.

© И.С.Рубанов, 2013.