ЦДООШ
Центр дополнительного образования "Одаренный школьник"

XLII РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

КИРОВСКАЯ ОБЛАСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА, 2015

ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ, МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Киров
2015

Оргкомитету и жюри муниципального этапа
математической олимпиады школьников

Уважаемые коллеги!

В начале олимпиады напомните участникам, что нужно не только приводить ответы, но и *обосновывать* их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ — лишь его результат).

Продолжительность олимпиады *составляет* **для 5-7 кл. — 2,5 часа, для 8 кл. — 3 часа, для 9 кл. — 3,5 часа, для 10-11 кл. — 4 часа,** *не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.*

После олимпиады (лучше всего — *в тот же день*) просим провести *разбор задач для ее участников.*

Отзывы об этой брошюре и олимпиадных заданиях направляйте по адресу: *610005, г. Киров, 5, а/я 1026, ЦДООШ.*

Автор благодарен А.В. Черанёвой, О.В. Старостиной, И.А. Семёновой, Е.М. Ковязиной, О.В. Рубановой за полезные обсуждения и критику.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. *Решение каждой задачи, независимо от её трудности, оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7, дробные оценки не допускаются.*

2. При оценке рассуждений в олимпиадных работах, как правило, сначала даётся ответ на принципиальный вопрос: являются они решением задачи (хотя, может быть, и с различными недостатками) или не являются (хотя, может быть, и содержат существенное продвижение в направлении решения). В первом случае оценка должна быть *не ниже 4*, во втором – *не выше 3*.

3. По проверке и оценке решений большинства задач мы даём *конкретные указания*. Они помещаются после наших решений и отмечены значком •. В случаях, не предусмотренных конкретными указаниями, оценка определяется по следующим общим правилам:

Оценка	*За что ставится*
7	Верное решение
6	Верное решение с небольшими недочётами
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты
4	Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно
3	Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении
1-2	Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Решение, выполненное более чем наполовину, считается *существенно неполным*, если:

- ✓ содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- ✓ при верной общей схеме рассуждений явно или скрыто опирается на важные недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- ✓ состоит в разборе нескольких возможных случаев, и хотя бы один *существенный* случай упущен или разобран неверно;
- ✓ состоит из двух частей (например, доказательства необходимости и достаточности либо доказательства оценки и построения примера), из которых верно выполнена только одна, причём более сложная.

При расхождении между общими и конкретными указаниями применяются конкретные.

4. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за «нерациональность» решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено конкретными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.***

5. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего — логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *не вычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочётам.

6. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике. Умение хорошо *догадываться* на олимпиаде должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение.

7. Ответ, найденный логическим путём, как правило, оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 5 КЛАССА

Задача 1. *У Маши есть лента длиной 1 м, палочка (без отметок на ней) длиной 30 см, кусочек мела и ножницы. Маша хочет отрезать от ленты кусок длиной 20 см. Подскажите, как ей это сделать.*

Решение. Есть много способов это сделать. Вот два из них. Первый. Сложим ленту вдвое и разрежем в месте сгиба. Получим два куска по 50 см. Отмерим палочкой и отрежем от одного из них кусок длиной в 30 см. Останется 20-сантиметровый кусок. Второй. Отмерим палочкой три раза по 30 см, отрежем оставшийся 10-сантиметровый кусок и отмерим с его помощью 20 см.

• Для полного балла достаточно описания верного способа действий, обоснование не обязательно.

Задача 2. *Незнайка заменил в примере на умножение некоторые цифры буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. У него получилось МИР·9 = РИМ. Докажите, что он где-то ошибся.*

Решение. Так как уже 112·9 = 1008 — четырёхзначное число, число МИР не больше 111. Значит, М = 1. Числа 111 и 110 не подходят, так как в числе МИР все цифры — разные. Значит, И = 0. Наконец, число 9Р должно оканчиваться на 1, откуда Р = 9. Но число МИР = 109 не подходит: 109·9 = 981.

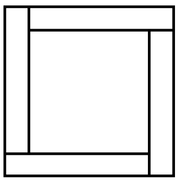
• Замечено, что М = 1, а Р = 9, дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*.

Задача 3. *Петя на три года старше Васи и втрое старше Коли. Коля на пять лет младше Васи. Сколько лет каждому из ребят? Объясните, как вы нашли ответ.*

Ответ. Коле 4 года, Васе — 9, Пете — 12. ***Решение.*** Петя старше Коли на 3+5 = 8 лет. Так как Петя втрое старше Коли, эти 8 лет составляют удвоенный возраст Коли. Поэтому Коле 4 года, Пете — 3·4 = 12 лет, а Васе — 12–3 = 9 лет.

• Ответ без объяснения или найденный подбором: *3 балла*. Проверка правильности ответа сама по себе объяснением не является!

Задача 4. *Мастер прикинул, что он сможет замостить квадратную комнату одинаковыми квадратными плитками, и при этом резать плитки ему не придётся. Сначала он положил плитки в два ряда по краям комнаты, и на это у него ушло 160 плиток. Сколько ещё надо положить плиток, чтобы замостить весь пол? Объясните, как вы рассуждали.*



Ответ. 324 плитки. ***Решение.*** Разобьём уже уложенные мастером плитки на четыре одинаковых прямоугольника, как показано на рисунке. Каждый прямоугольник будет состоять из 160:4 = 40 плиток. Так как его ширина равна 2 плиткам, его длина составляет 40:2 = 20 плиток, а длина стороны не замощённого плитками квадрата — 20–2 = 18 клеток. Поэтому нужно положить ещё 18·18 = 324 плитки.

• Ответ без проверки его правильности: *0 баллов*. Верный ответ с проверкой его правильности, но без объяснения, из которого видно, что других ответов у задачи нет: *4 балла*.

Задача 5. *Можно ли выписать в ряд 20 натуральных чисел так, чтобы сумма всех выписанных чисел равнялась 300, а сумма любых семи чисел, идущих подряд, была меньше 100? Если можно — приведите пример, если нельзя — объясните, почему.*

Ответ. Нельзя. ***Решение.*** Допустим, такое возможно. Суммы чисел с первого по седьмое и с восьмого по 14-е по условию меньше 100. Поэтому сумма всех чисел с первого по 14-е меньше 200. Вычитая её из суммы всех двадцати чисел, получаем, что сумма всех чисел с 15-го по 20-е больше 300–200 = 100. Но тогда сумма всех чисел с 14-го по 20-е и подавно больше 100, а по условию она должна быть меньше 100. Так не бывает.

• Ответ без объяснения: *0 баллов*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 6 КЛАССА

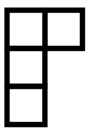
Задача 1. *В примере на сложение некоторые цифры заменили буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось АААА+БББ+ВВ+Г = 10968. Восстановите пример.*

Решение. 9999+888+77+4 = 10968.

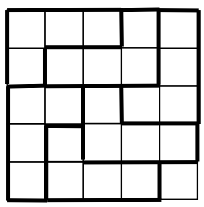
♦ Ответ единственный. В самом деле, А = 9, иначе АААА не больше, чем 8888, и сумма в левой части равенства «не дотягивает» даже до 10000. Вычитая из обеих его частей по 9999, получаем БББ+ВВ+Г = 969 (*). Теперь заметим, что Б = 8, иначе БББ не больше 777, и БББ+ВВ+Г меньше 900. Вычитая из обеих частей равенства (*) по 888, получаем ВВ+Г = 81, откуда В = 7 и Г = 4.

• Для полного балла достаточно верного примера, проверки его единственности не требуется.

Задача 2. *Какое наибольшее количество четырёхклеточных фигур в форме буквы «Г» (см. рисунок справа) можно разместить без наложений в клетчатом квадрате размером 5×5? (Фигуры можно поворачивать и переворачивать.) Ответ подтвердите рисунком.*

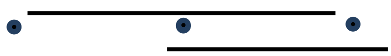


Ответ. 6. ***Решение.*** На рисунке справа показано, как можно разместить шесть фигур. Семь фигур разместить нельзя, потому что в них вместе 28 клеток, а в квадрате — только 25.



• Для полного балла достаточно верного рисунка. Формальное объяснение, почему больше шести фигур разместить нельзя, не обязательно. Ответ, не подтверждённый рисунком: *0 баллов*.

Задача 3. *Фома и Ерёма шли с постоянными скоростями в одном направлении по дороге, вдоль которой стоят километровые столбы. За 15 минут Фома прошёл мимо двух столбов, а Ерёма — мимо одного. Мог ли Ерёма идти быстрее Фомы? Если да — покажите, как это могло быть, если нет — объясните, почему.*



Ответ. Мог. ***Решение.*** Пример — на рисунке справа: верхняя линия — путь Ерёмы, нижняя — путь Фомы, кружочки — столбы. Из рисунка видно, что Ерёма мог пройти почти два километра, а Фома — лишь немногим больше одного.

♦ См. также задачи 4 для 7 класса и 3 для 8 класса.

• Полный балл ставится за любой верный числовой пример (например: Ерёма прошёл 900 м до столба и 900 м после, а Фома — 100 м до первого столба и 100 м после второго) или очевидно верную картинку. Проверка числового примера не обязательна. Ответ без верного примера или объяснения: *0 баллов*.

Задача 4. *В каждую клетку таблицы 3×3 записали по числу. Оказалось, что сумма чисел в каждой строке таблицы равна 18, сумма чисел в каждом столбце таблицы также равна 18, а сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 25. Какое число могло оказаться в центре таблицы? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.*

Ответ. 10. ***Решение.*** Занумеруем столбцы нашей таблицы слева направо буквами a, b, c, а её строки снизу вверх — цифрами 1, 2, 3. Сумма чисел в столбцах a и b равна $18+18 = 36$. При этом клетки $a2$, $b2$, $a3$ и $b3$ образуют квадрат 2×2, и сумма чисел в них равна 25. Значит, сумма чисел в клетках $a1$ и $b1$ равна $36–25 = 11$. Аналогично показывается, что равны 11 суммы чисел в клетках $c1$ и $c2$, $c3$ и $b3$, $a3$ и $a2$. Стало быть, сумма всех чисел во всех клетках таблицы, кроме центральной, равна $11\cdot4 = 44$. А сумма чисел во всей таблице равна $18\cdot3 = 54$. Таким образом, в центре стоит число $54–44 = 10$.

♦ Заметим, что сумма чисел в клетках $b1$ и $c1$ также равна 11. Таким образом, число в клетке $b1$ равно $11+11–18 = 4$. Аналогично, равны 4 числа в клетках $c2$, $b3$ и $a2$. Отсюда легко получить, что числа в угловых клетках должны равняться 7. Легко проверить, что таблица с десяткой в центре, семёрками в углах и четвёрками в серединах сторон действительно удовлетворяет условиям задачи, и мы убедились, что других таких таблиц нет.

• Ответ без объяснений: *0 баллов*. Ответ, подтверждённый примером таблицы, без обоснования, почему другие числа в центре таблицы стоять не могут: *3 балла*. Для полного балла достаточно обоснования, что в центре любой искомой таблицы стоит число 10. Проверки существования такой таблицы не требуется, так как оно дано в условии задачи.

Задача 5. *В комнате собрались три человека. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, либо хитрец, который может и говорить правду и лгать по своему желанию. Один из собравшихся сказал: «Среди нас есть лжец». Другой сказал: «Среди любых двух из нас есть лжец». Третий сказал: «Все мы — лжецы». Докажите, что среди собравшихся есть хитрец.*

Решение. Допустим, среди собравшихся нет хитреца. Тогда каждый из них — рыцарь или лжец. Третий не мог сказать правду: иначе получилось бы, что правду сказал лжец. Значит, он лжец. Тогда первый сказал правду, и он — рыцарь. Остался второй. Допустим, он солгал. Тогда он лжец, и всего среди собравшихся два лжеца: второй и третий. Но тогда среди любых двух собравшихся в самом деле есть лжец, и получается, что лжец сказал правду — противоречие. Допустим, второй сказал правду. Тогда среди собравшихся два рыцаря: первый и второй. Но в таком случае среди двоих — первого и второго — нет лжеца, и получается, что второй солгал. Снова противоречие.

Таким образом, предположение, что среди собравшихся нет хитреца, неизбежно приводит к противоречию. Значит, он есть, что и требовалось доказать.

♦ Ситуация, описанная в задаче, действительно возможна: например, если все трое собравшихся — хитрецы, и все они солгали.

• Показано, что при отсутствии хитрецов третий обязательно лжец, а первый — обязательно рыцарь, а дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*. За отсутствие примера, когда описанная в задаче ситуация действительно возникает, *баллы не снимаются*, а за его наличие — *не добавляются*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

Задача 1. *У Пети есть много монет достоинством в 13 тугриков, а у Васи — много монет достоинством в 17 тугриков. Других денег ни у кого из них нет. Петя хочет купить у Васи карандаш за 1 тугрик. Смогут ли они рассчитаться?*

Ответ. Смогут. ***Решение.*** Например, Петя может дать Васе четыре монеты по 13 тугриков и получить у него три монеты по 17 тугриков сдачи.

• Для полного балла достаточно верного примера.

Задача 2. *Каждое из трёх слагаемых на 3 больше их суммы. Чему равны слагаемые?*

Ответ. –3/2. ***Решение.*** Из условия ясно, что все слагаемые равны. Пусть каждое равно x. По условию $x = 3x+3$, откуда $x = -3/2$.

• Ответ без объяснения: *5 баллов*.

Задача 3. *Учительница Марья Ивановна задумала двузначное число. При этом она сообщила трём своим ученикам Пете, Васе и Толе следующее:*

«Это число то ли кончается на 5, то ли делится на 7».
«Это число то ли больше 20, то ли кончается на 9».
«Это число то ли делится на 12, то ли меньше 21».

Всё, сказанное Марьей Ивановной, — правда. Помогите Пете, Васе и Толе найти число. (Фраза «То ли А, то ли Б» означает, что либо верно утверждение А, либо верно утверждение Б, либо верны оба утверждения А и Б).

Ответ. 84. ***Решение***. Допустим, это число кончается на 5. Тогда оно не может кончаться на 9, и, значит, больше 20. Так как целое число, большее 20, не может быть меньше 21, искомое число делится на 12. Но число, делящееся на 12, четно, и потому не может оканчиваться на 5. Противоречие. Значит, искомое число делится на 7. Единственное двузначное число, делящееся на 7 и оканчивающееся на 9, это 49. Но число 49 не делится на 12 и больше 21. Противоречие. Поэтому искомое число больше 20 и делится на 12. Единственное двузначное число, делящееся на 7 и 12, это 84.

• Ответ без обоснования его единственности: *3 балла*. Показано, что искомое число делится на 7, дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*.

Задача 4. *Фома и Ерёма шли с постоянными скоростями в одном направлении по дороге, вдоль которой стоят километровые столбы. За 20 минут Фома прошёл мимо двух столбов, а Ерёма — мимо трёх. Мог ли Фома идти в полтора раза быстрее Ерёмы?*

Ответ. Не мог. ***Решение.*** Заметим, что, пройдя километр, человек обязательно пройдёт мимо какого-нибудь километрового столба. Так как Фома прошёл только мимо двух столбов, он прошёл меньше трёх километров. Ерёма же прошёл по крайней мере два километра: от первого пройденного столба до третьего. Поэтому отношение скорости Фомы к скорости Ерёмы меньше, чем $3/2 = 1{,}5$.

♦ См. также задачи 3 для 6 и 8 классов.

• Ответ без обоснования: *0 баллов*.

Задача 5. *Вася задумал четыре натуральных числа: a, b, c, d. За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что никакие два из задуманных чисел не имеют общих простых делителей. За какую наименьшую сумму он сможет узнать все задуманные числа?*

Ответ. За 3 рубля. ***Решение.*** *Покажем, как обойтись тремя рублями*. Сначала узнаем произведения ab и bc. Так как у чисел a и c нет общих простых делителей, наибольший общий делитель этих произведений равен b. Таким образом мы узнаём число b, а с ним и числа $a = ab/b$ и $c = bc/b$. Теперь спрашиваем произведение bd и узнаём $d = bd/b$. Теперь *покажем, что двух рублей не хватит*. Пусть мы знаем только два произведения. Тогда в них должны входить все четыре числа, иначе про одно из них мы не будем знать вообще ничего. Но в таком случае каждое число входит ровно в одно произведение, и если, например, произведения равны 6 и 35, то мы не сможем отличить набор 2, 3, 5, 7 от набора 1, 6, 1, 35.

♦ См. также задачи 5 для 8 класса, 3 для 9 класса и 4 для 10 класса.

• Объяснение, почему хватит трёх рублей, оценивается *из 4 баллов*, объяснение, почему не хватит двух рублей, — *из 3 баллов*, баллы за оба объяснения суммируются. Ответ без всякого обоснования: *0 баллов*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. *В спортивном классе среди отличников ровно половина — волейболисты, а среди волейболистов ровно пятая часть — отличники. Кого и во сколько раз в этом классе больше — отличников или волейболистов?*

Ответ. Волейболистов больше в 2,5 раза. ***Решение.*** Пусть в классе x волейболистов-отличников. Тогда отличников в классе $2x$, а волейболистов — $5x$, откуда и получаем ответ.

• Ответ без обоснования или «обоснованный» лишь конкретным числовым примером: *1 балл*.

Задача 2. *В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и BE, которые пересеклись в точке H. Оказалось, что $HD = HE$. Докажите, что $AC = BC$.*

Решение. Прямоугольные треугольники CHD и CHE равны, так как имеют общую гипотенузу CH и равные катеты HD и HE. Следовательно, $CD = CE$. Но тогда по катету и острому углу равны прямоугольные треугольники ACD и BCE, откуда и следует, что $AC = BC$.

• Показано, что $CD = CE$, дальнейшего продвижения нет: *2 балла*.

Задача 3. *Фома и Ерёма шли с постоянными скоростями в одном направлении по дороге, вдоль которой стоят километровые столбы. За час Фома прошёл мимо пяти столбов, а Ерёма — мимо шести. Могла ли скорость Фомы быть на 15% больше скорости Ерёмы?*

Ответ. Могла. ***Решение.*** Пусть Ерёма в начале часа был у первого из пройденных им столбов, а в конце часа — у шестого столба. Тогда он прошёл за час 5 км. Пусть Фома в начале часа был в 900 м от первого из пройденных им столбов, а в конце часа — в 850 м за пятым из пройденных им столбов. Тогда он прошёл 900+4000+850 = 5750 м = 5,75 км. Так как 5,75 : 5 = 1,15, Фома за час прошёл на 15% больше Ерёмы. Значит, и скорость его была на 15% больше.

♦ См. также задачи 3 для 6 класса и 4 для 7 класса.

• Ответ без обоснования: *0 баллов*. Ответ с правдоподобно иллюстрирующим идею верного примера чертежом без соответствующих числовых данных: *1 балл*. Верный числовой пример без проверки: *6 баллов*.

Задача 4. *Из клетчатого квадрата размером 11×11 вырезали 17 клетчатых прямоугольников размером 1×6. Докажите, что центральная клеточка квадрата осталась не вырезанной.*

Решение. Пусть центральная клеточка вырезана. Для удобства рассуждений расположим квадрат так, чтобы содержащий эту клеточку прямоугольник 1×6 был горизонтален. Тогда в тех шести столбцах, где он расположен, вертикальный прямоугольник расположить нельзя. Два вертикальных прямоугольника в одном столбце тоже не помещаются. Поэтому вертикальных прямоугольников среди вырезанных не больше пяти. Горизонтально же вырезанных прямоугольников в каждой из 11 строк не больше одного. Поэтому всего получается не больше 16 вырезанных прямоугольников. Таким образом, если вырезано больше 16 прямоугольников, центральная клеточка не затронута.

♦ См. также задачи 5 для 9–11 классов.

Задача 5. *Вася задумал семь натуральных чисел: a, b, c, d, e, f, g. За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что любые два из задуманных чисел взаимно просты (то есть не имеют общих делителей, больших 1). За какую наименьшую сумму он сможет узнать все задуманные числа?*

Ответ. За 5 рублей. ***Решение.*** *Покажем, как обойтись пятью рублями*. Сначала узнаем произведения ab и bc. Так как у чисел a и c нет общих простых делителей, наибольший общий делитель этих произведений равен b. Таким образом мы узнаём число b, а с ним и числа $a = ab/b$ и $c = bc/b$. Аналогично за два вопроса узнаем числа d, e и f. Теперь спрашиваем произведение fg и узнаём $g = fg/f$. Теперь *покажем, что четырёх рублей не хватит*. Пусть мы знаем только четыре произведения. Тогда в них должны входить все семь чисел, иначе про одно из них мы не будем знать вообще ничего. При этом только одно число может входить в два произведения. Забудем про это число и те два, которые входят с ним в произведения. Среди четырёх оставшихся чисел возьмём два, входящие в одно произведение. Пусть это произведение равно 6. Так как больше ничего о сомножителях не известно, мы не сможем отличить двойку и тройку от единицы с шестёркой.

♦ См. также задачи 5 для 7 класса, 3 для 9 класса и 4 для 10 класса.

• Объяснение, почему хватит пяти рублей, оценивается *из 4 баллов*, объяснение, почему не хватит четырёх рублей, — *из 3 баллов*, баллы за оба объяснения суммируются. Ответ без всякого обоснования: *0 баллов*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. *Найдутся ли три таких числа a, b, c, что* $a > b > c$ *и* $b^2 < a^2 < c^2$

Ответ. Да. ***Решение.*** Например, $a = 2$, $b = –1$, $c = –3$.

♦ См. также задачу 2 для 10 класса и задачу 1 для 11 класса.

• Для полного балла достаточно верного примера. Проверка не обязательна. Ответ «да» без примера (или иного обоснования): *0 баллов*.

Задача 2. *В республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Лимон» любят лимоны, а среди избирателей, голосовавших за другие партии, любящих лимоны только 10 процентов. Сколько процентов голосов набрала партия «Лимон», если ровно 46 процентов участвовавших в голосовании любят лимоны?*

Ответ. 40%. ***Решение.*** Пусть партия «Лимон» набрала x% голосов. Тогда по условию $x+0{,}1(100–x) = 46$. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем $0{,}9x = 36$, откуда $x = 40$.

• Уравнение верно составлено, но неверно решено: *4 балла*. Ответ без обоснования: *0 баллов*.

Задача 3. *Вася задумал шесть натуральных чисел: a, b, c, d, e, f. За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что любые два из задуманных чисел взаимно просты (то есть не имеют общих делителей, больших 1). Как ему за 4 рубля узнать все задуманные числа?*

Решение. Сначала узнаем произведения ab и bc. Так как у чисел a и c нет общих простых делителей, наибольший общий делитель этих произведений равен b. Таким образом мы узнаём число b, а с ним и числа $a = ab/b$ и $c = bc/b$. Аналогично за два вопроса узнаем числа d, e и f.

♦ См. также задачи 5 для 7 и 8 классов и 4 для 10 класса.

• Верно указаны нужные произведения, но не объяснено, как найти числа: *1 балл*.

Задача 4. *На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены равносторонние треугольники:* ABC_1 *и* BCA_1 *— во внешнюю сторону и* CAB_1 *— вовнутрь. Точки* A_1, B_1 *и* C_1 *лежат на одной прямой. Найдите угол ABC.*

Ответ: 60°. ***Решение***. Треугольник C_1AB_1 равен треугольнику BAC по двум сторонам и углу между ними. Аналогично, треугольник B_1CA_1 равен треугольнику ACB. Поэтому $\angle AB_1C_1 = \angle BCA$, а $\angle CB_1A_1 = \angle BAC$. Поскольку сумма углов AB_1C_1, AB_1C и CB_1A_1 равна 180°, $\angle ABC = \angle AB_1C = 60°$.

• Доказано равенство треугольников C_1AB_1 и BAC, B_1CA_1 и ACB, дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

Задача 5. *Игорь хочет вырезать из клетчатого квадрата размером 11×11 17 клетчатых прямоугольников размером 1×6. Докажите, что в квадрате есть клеточка, которая останется не вырезанной, как бы Игорь ни старался.*

Решение. Не вырезанной останется центральная клеточка квадрата. Обоснование см. в решении задачи 4 для 8 класса.

♦ См. также задачу 5 для 10 класса.

• Без обоснования утверждается, что не вырезанной останется центральная клеточка: *1 балл*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. *Фома и Ерёма шли с постоянными скоростями в одном направлении по дороге, вдоль которой стоят километровые столбы. За 15 минут Фома прошёл мимо двух столбов, а Ерёма — мимо одного. Мог ли Ерёма идти быстрее Фомы?*

Ответ. Мог. ***Решение.*** См. решение задачи 3 для 6 класса.

♦ См. также задачи 4 для 7 класса и 3 для 8 класса.

• Полный балл ставится за любой верный числовой пример (например: Ерёма прошёл 900 м до столба и 900 м после, а Фома — 100 м до первого столба и 100 м после второго) или очевидно верную картинку. Ответ без верного примера или объяснения: *0 баллов*.

Задача 2. *Найдутся ли три таких числа* a, b, c, *что* $a > b > c$ *и* $1/a > 1/b > 1/c$*?*

Ответ. Нет. ***Решение.*** Заметим, что среди чисел a, b и c есть два, имеющие один знак. Но если числа x и y имеют один знак и $x > y$, то $1/x < 1/y$.

♦ См. также задачи 1 для 9 и 11 классов.

• Ответ без обоснования: *0 баллов*.

Задача 3. *Диагонали параллелограмма* $ABCD$ *пересекаются в точке* O. *На стороне* BC *взяли такую точку* M, *что* $BM = 2CM$. *Прямые* DM *и* AB *пересекаются в точке* Q, *а прямые* OM *и* CD *— в точке* P. *Докажите, что прямые* PQ *и* BD *параллельны.*

Решение. Положим $AB = a$. Заметим, что, так как $MB \parallel AD$, треугольники BMQ и ADQ подобны с коэффициентом $MB/AD = MB/BC = 2/3$, откуда $BQ = 2a$. Пусть далее N — середина стороны BC. Тогда $ON \parallel CP$, и треугольники MPC и MON подобны с коэффициентом $MC/MN = 2$, откуда $CP = 2ON = a$ и $DP = DC+CP = 2a = BQ$. Таким образом, в четырёхугольнике $BDPQ$ стороны DP и BQ параллельны и равны. Значит, $BDPQ$ — параллелограмм, откуда и следует, что $PQ \parallel BD$.

Задача 4. *Вася задумал шесть натуральных чисел:* a, b, c, d, e, f. *За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что любые два из задуманных чисел взаимно просты (то есть не имеют общих делителей, больших 1). За какую наименьшую сумму он может узнать все задуманные числа?*

Ответ. За 4 рубля. ***Решение.*** *Как обойтись четырьмя рублями*, показано в решении задачи 3 для 9 класса. Покажем, что *трёх рублей не хватит*. Пусть мы знаем только три произведения. Тогда в них должны входить все шесть чисел, иначе про одно из них мы не будем знать вообще ничего. Но в таком случае каждое число входит ровно в одно произведение, и если, например, одно из произведений равно 6, мы не сможем отличить набор из двойки и тройки от набора из единицы и шестёрки.

♦ См. также задачи 5 для 7 и 8 классов и 3 для 9 класса.

• Объяснение, почему хватит четырёх рублей, оценивается *из 4 баллов*, объяснение, почему не хватит трёх рублей — *из 3 баллов*, баллы за оба объяснения суммируются. Ответ без всякого обоснования: *0 баллов*.

Задача 5. *Игорь хочет вырезать из клетчатого квадрата размером 19×19 14 клетчатых прямоугольников размером 2×10. Докажите, что в квадрате есть клеточка, которая останется не вырезанной, как бы Игорь ни старался.*

Решение. Покажем, что не вырезанной останется центральная клеточка квадрата. Допустим, она вырезана. Для удобства рассуждений расположим квадрат так, чтобы содержащий эту клеточку прямоугольник 2×10 был горизонтален. Тогда в тех десяти столбцах, где он расположен, вертикальный прямоугольник расположить нельзя. Два вертикальных прямоугольника пересекаться с одним и тем же столбцом тоже не могут. Поэтому вертикальных прямоугольников среди вырезанных не больше, чем $(19–10)/2 = 9/2$, то есть не больше четырёх. Горизонтально же вырезанных прямоугольников не больше, чем 19/2, то есть не больше девяти. Поэтому всего получается не больше 13 вырезанных прямоугольников.

♦ См. также задачу 5 для 9 класса.

• Без обоснования утверждается, что не вырезанной останется центральная клеточка: *1 балл*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. *Найдутся ли три таких числа a, b, c, что $a > b > c$ и $\operatorname{tg}a < \operatorname{tg}b < \operatorname{tg}c$?*

Ответ. Найдутся. ***Решение.*** Например, $a = 3\pi+\pi/6$, $b = 2\pi+\pi/4$, $c = \pi+\pi/3$.

♦ См. также задачи 1 для 9 класса и 2 для 10 класса.

• Для полного балла достаточно верного примера с проверкой. Верный пример без проверки: *6 баллов*. Ответ без обоснования: *0 баллов*.

Задача 2. *Графики $y = ax^2+bx+c$ и $y = dx^2+ex+f$ пересекаются ровно в двух различных точках. Докажите, что числа a и d не равны.*

Решение. По условию уравнение $ax^2+bx+c = dx^2+ex+f$ должно иметь ровно два решения. Но если $a = d$, это уравнение равносильно уравнению $(b–e)x+(c–f) = 0$, которое при $b–e \neq 0$ имеет ровно одно решение, а при $b–e = 0$ — ни одного решения, если $c–f \neq 0$, и бесконечно много решений, если $c–f = 0$.

• Получено уравнение $(b–e)x+(c–f) = 0$ или аналогичное, дальнейшего содержательного продвижения нет: *1 балл*.

Задача 3. *Вася задумал шесть натуральных чисел: a, b, c, d, e, f. За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что любые два из задуманных чисел взаимно просты (то есть не имеют общих делителей, больших 1). Сможет ли он за 4 рубля узнать все задуманные числа?*

Ответ. Сможет. ***Решение.*** См. решение задачи 3 для 9 класса.

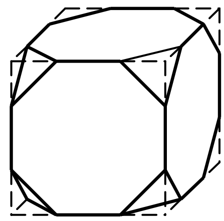
♦ См. также задачи 5 для 7 и 8 классов и 4 для 10 класса.

• Ответ без обоснования: *0 баллов*. Верно указаны нужные произведения, но не объяснено, как найти числа: *1 балл*.

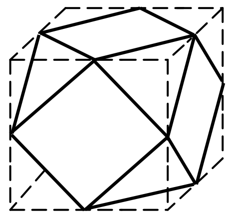
Задача 4. *От куба с ребром 1 отпилили восемь правильных треугольных пирамид с вершинами в вершинах куба. У получившегося 14-гранника все рёбра оказались равными. Найдите объём этого 14-гранника.*

Ответ. $\dfrac{21\sqrt{2}+28}{21\sqrt{2}+30}=\dfrac{21+14\sqrt{2}}{21+15\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}-7}{3}$ или $\dfrac{5}{6}$.

Решение. Есть два искомых 14-гранника: первый получается, если грани куба превращаются после опиливания в равносторонние восьмиугольники, второй — если в квадраты (верхний и нижний рисунки справа).



Очевидно, все отпиленные пирамиды равны. Обозначим через x длину их боковых рёбер. Тогда сторона основания каждой из отпиленных пирамид равна $x\sqrt{2}$, объём каждой из этих пирамид равен $x^3/6$, а объём 14-гранника равен $1–8\cdot(x^3/6) = 1–4x^3/3$ (*).



На верхнем рисунке ребро куба складывается из двух отрезков длины x и одного отрезка длины $x\sqrt{2}$, откуда $1 = 2x+x\sqrt{2}$ и $x = 1/(2+\sqrt{2})$. На нижнем рисунке имеем $x = 1/2$. Подставляя найденные значения x в формулу (*), получаем оба приведённых выше ответа.

• Описан только один из двух возможных многогранников, объём не найден: *1 балл*. Описан только один из двух возможных многогранников, объём найден: *3 балла*. Описаны оба возможных многогранника, объёмы не найдены: *3 балла*. Описаны оба возможных многогранника, найден только один объём: *5 баллов*.

Просим внимательно проверять вычисления! Верный ответ в случае восьмиугольных граней может быть записан не только одним из трёх приведённых нами способов, но и другими.

Задача 5. *Игорь хочет вырезать из клетчатого квадрата размером 11×11 17 клетчатых прямоугольников размером 1×6. Можно ли отметить в квадрате одну клеточку так, чтобы она осталась не вырезанной, как бы Игорь ни старался?*

Ответ. Можно. ***Решение.*** См. решение задачи 5 для 9 класса.

♦ См. также задачу 5 для 10 класса.

• Ответ «можно» без обоснования: *0 баллов*. Без обоснования утверждается, что не вырезанной останется центральная клеточка: *1 балл*.

ИСТОЧНИКИ И АВТОРЫ ЗАДАЧ

С. Берлов, личная олимпиада 27 Уральского турнира юных математиков: 9-4.

По мотивам задачи с олимпиады «Путь к Олимпу» для 5 класса, Омск, 2011: 5-4.

Омские олимпиады: 7-3.

Свердловская областная олимпиада 1998/99 учебного года: 9-2.

Екатеринбургская городская олимпиада 2002 года: 10-3.

Фольклор: 5-5, 7-1, 7-2, 8-1, 9-1, 11-1, 11-2.

Остальные задачи составлены И. Рубановым специально для этой олимпиады.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Информация о победителях и призерах областной олимпиады 2014/15 г.

ДИПЛОМ I СТЕПЕНИ (ПОБЕДИТЕЛИ): *Колпащиков Александр, Семёнова Мария* (оба — КФМЛ, 7 кл.), *Лучинин Сергей*, *Коробов Никита* (оба — КФМЛ, 8 кл.), *Новосёлова Полина* (КФМЛ, 9 кл.), *Зяблицев Владимир* (Киров, лицей 21, 10 кл.), *Нуждов Глеб* (КФМЛ, 11 кл.).

ДИПЛОМ II СТЕПЕНИ (ПРИЗЁРЫ): *Кутявин Денис* (КЛЕН, 7 кл.), *Ашихмин Анатолий*, *Щенников Григорий*, *Евтухов Анатолий*, *Ланских Ирина* (все — КФМЛ, 8 кл.), *Мариев Артём*, *Томинин Ярослав* (оба — КФМЛ, 9 кл.), *Анисимова Виктория* (г. Кирово-Чепецк, гимназия №1, 10 кл.), *Пахомов Дмитрий* (СОШ с УИОП г. Омутнинска, 10 кл.), *Исупов Кирилл*, *Артемьев Александр*, *Князев Леонид* (все — КФМЛ, 10 кл.), *Бураков Иван* (г. Кирово-Чепецк, лицей, 11 кл.), *Васильчишин Сергей*, *Кайсин Илья* (оба — КФМЛ, 11 кл.).

ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ (ПРИЗЁРЫ): *Никонов Михаил* (Киров, лицей 21, 7 кл.), *Шушпанов Стефан* (КФМЛ, 7 кл.), *Огибалова Ульяна* (КФМЛ, 6 кл. — за 7 кл.), *Шамов Степан* (КФМЛ, 8 кл.), *Мелешкин Артём* (КЭПЛ, 9 кл.), *Вершинин Михаил* (Оричевский район, СОШ пгт Мирный, 9 кл.), *Назарова Дарья* (КФМЛ, 10 кл.), *Будин Николай* (КФМЛ, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНАЯ ГРАМОТА: *Гундоров Андрей* (КФМЛ, 7 кл.), *Савельев Артём* (КФМЛ, 6 кл. — за 7 кл.), *Токмаков Матвей* (Киров, лицей 21, 7 кл.), *Крюков Денис* (КЛЕН, 7 кл.), *Проскура Милена* (Киров, ВГГ, 7 кл.), *Ширяева Дарья*, *Клёпов Дмитрий* (оба — КФМЛ, 8 кл.), *Томинин Владислав*, *Кузнецов Александр*, *Шалыгин Георгий*, *Шатунова Дарья* (все — КФМЛ, 9 кл.), *Рубцов Антон* (КЛЕН, 9 кл.), *Дуняшев Алмаз* (г. Кирово-Чепецк, гимназия №1, 10 кл.), *Шишкин Михаил* (КФМЛ, 11 кл.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ХРОНИКА (ноябрь 2014 – октябрь 2015)

1-8 ноября: В Технопарке г. Сарова состоялся XVIII Кубок памяти А.Н. Колмогорова. Участвовали 32 команды, представлявшие около 25 городов России. Команда «Киров 10-11» заняла 7 место в высшей лиге старшей группы, команда «Киров-9» — 3 место в первой лиге младшей группы.

29 ноября – 6 декабря: Под Ярославлем прошёл XLIV Уральский турнир юных математиков. Участвовали 66 команд, представлявшие 31 город России. Команда «Киров-8» заняла 4 место в высшей лиге старшей группы, команда «Киров-7» — 8 место в высшей лиге младшей группы, команда «Киров-6» — 4 место в высшей лиге младшей группы.

6 – 8 февраля: В Казани состоялся турнир математических игр имени П.А. Широкова. Десять команд кировчан участвовали в этом турнире онлайн. Команда «Киров-5-1» завоевала диплом I степени, «Киров-5-2» и «Киров-5-5» — дипломы II степени, «Киров-5-3», «Киров-6-2» и «Киров-4» (играла в лиге 5 классов) — дипломы III степени.

20–26 февраля: XV Уральский (XXIII Кировский) турнир юных математиков. Участвовали 78 команд, представлявшие 30 городов России. Команда «Киров-8-1» заняла 7 место в высшей лиге старшей группы, «Киров-8-2» — второе место в первой лиге старшей группы, «Киров-8-3» — поделила 3-4 места во второй лиге старшей группы, команда «Киров-7» — 3 место в высшей лиге младшей группы, команда «Киров-6-1» — 7 место в первой лиге группы «Старт», «Киров-6-2» — первое место во второй лиге группы «Старт», команда «Киров-5» — 8 место во второй лиге группы «Старт».

8 февраля (для 6-8 кл.) и 1 марта (для 9-11 кл.) февраля: Санкт-Петербургская городская математическая олимпиада. 17 кировчан награждены дипломами и похвальными отзывами: *Артём Савельев*, *Сергей Лучинин*, *Анатолий Ашихмин*, *Ирина Ланских* — дипломами II степени, *Мария Семёнова*, *Степан Шамов, Дмитрий Пахомов* — дипломами III степени, *Ольга Полозова*, *Денис Кутявин*, *Анатолий Евтухов*, *Дмитрий Клёпов*, *Полина Новосёлова* — похвальными отзывами I степени, *Ксения Головина* (КФМЛ, 6 кл.), *Ульяна Огибалова*, *Александр Колпащиков*, *Михаил Никонов*, *Никита Коробов*, *Дарья Ширяева* — похвальными отзывами II степени.

19 марта: 29554 учащихся из Кировской области участвуют в международном математическом конкурсе-игре "Кенгуру-2015".

22 марта: Устный тур XXXVI Турнира городов (*г. Москва*). *Глеб Нуждов* награждён дипломом I степени.

25-28 марта состоялся заключительный этап V олимпиады имени Леонарда Эйлера, проведённой для восьмиклассников России АНОО «Вятский центр дополнительного образования» и Московским Центром непрерывного математического образования. В нём приняли участие 173 учащихся 6-8 классов, распределённых по территориальному признаку по четырём финалам в Омске, Кирове, Москве и Санкт-Петербурге. В кировском финале участвовали 53 школьника, в том числе 9 кировчан. Кировчанин *Никита Коробов* завоевал диплом II степени, *Анатолий Евтухов*, *Дарья Ширяева*, *Сергей Лучинин* — дипломы III степени, *Григорий Щенников*, *Анатолий Ашихмин*, *Степан Шамов* — похвальные грамоты.

10 – 12 апреля: В Казани состоялся турнир математических игр имени Н.Г. Чеботарева. Девять команд кировчан участвовали в этом турнире онлайн. Команды «Киров-5-1», «Киров-6-1» и «Киров-6-3» завоевали дипломы II степени.

12 апреля: В г. Кирове была проведена XIII устная олимпиада по геометрии, учреждённая Московским Центром непрерывного математического образования. Участвовал 21 кировчанин. *Ирина Ланских, Сергей Лучинин, Степан Шамов, Кирилл Исупов* завоевали дипломы II степени. *Анатолий Ашихмин*, *Полина Новосёлова*, *Георгий Шалыгин*, *Владимир Зяблицев*, *Сергей Васильчишин* — дипломы III степени. *Дарья Ширяева*, *Григорий Щенников* — похвальные отзывы.

23-29 апреля: Всероссийская математическая олимпиада в Казани. Участвовали кировчане: *Сергей Васильчишин* (диплом призёра по 11 кл.), *Полина Новосёлова* (похвальная грамота по 9 кл.), *Артём Мариев*, *Ярослав Томинин*, *Владимир Зяблицев*, *Иван Бураков*, *Глеб Нуждов*.

3–28 июля: XXXI Летняя математическая школа Кировской области. 431 учащийся, в т. ч. 314 иногородних из Абдулино, Астаны (Казахстан), Барнаула, Белгорода, Великого Устюга, Вологды, Воткинска, Геленджика, Глазова, Димитровграда, Екатеринбурга, Железнодорожного Московской области, Заинска, Златоуста, Ижевска, Иркутска, Казани, Каунаса (Литва), Качканара, Кропоткина, Куйбышева, Кургана, Лабытнанги, Майкопа, Мамадыша, Москвы, Набережных Челнов, Нижневартовска, Нижнекамска, Нижнего Новгорода, Нижнего Тагила, Новосибирска, Ногинска, Омска, Пензы, Перми, Полевского, Самары, Санкт-Петербурга, Саратова, Смоленска, Снежинска, Сыктывкара, Тараза (Казахстан), Тобольска, Тольятти, Ульяновска, Уфы, Ханты-Мансийска, Харькова (Украина), Химок, Челябинска, Черноголовки, Ярославля.

29 июля – 1 августа: Финальный тур XI олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, г. Дубна. Участвовали *Сергей Лучинин* (награждён дипломом II степени), *Ирина Ланских* (награждена дипломом III степени), *Степан Шамов, Кирилл Исупов*.

3 – 11 августа: *Полина Новосёлова, Леонид Князев и Дмитрий Пахомов* участвуют в XXV Международной конференции Турнира городов (*Даховская, Республика Адыгея*). По итогам конференции награждены дипломами за заметное продвижение в проекте «Три класса треугольников».

20 сентября состоялась игра «Математическое домино», в которой приняли участие 704 пятиклассника и 544 шестиклассника из Кирова и области.

9 – 11 октября: В Казани состоялся турнир математических игр имени А.П. Нордена. десять команды кировчан участвовали в этом турнире онлайн: команды «Киров-5-2» и «Киров-6-1» завоевали дипломы I степени, «Киров-5-1», «Киров-5-3», «Киров-5-4» и «Киров-6-3» — дипломы II степени, «Киров-5-5», «Киров-6-4» — дипломы III степени.

27 сентября состоялся Турнир им. Ломоносова (математика, физика, химия, биология), в котором участвовали 510 семиклассников и 475 восьмиклассников.

По итогам **XXXVI Турнира городов**, проходившего в 2014/15 учебном году, 46 школьников из Кировской области награждены дипломами победителей.